"新工科建设"教学探索成果·"十三五"规划教材

微积分同步练习与提高（一）

余琛妍　李莎莎　涂黎晖　主编

王聚丰　孙海娜　翁云杰　副主编

苏德矿　主审

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是与《微积分学（第二版）》上册（高等教育出版社，2013，ISBN 9787040374582）配套的同步练习与提高，内容包括：函数与极限、导数与微分、微分学基本定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、一元微积分学的补充应用和无穷级数。

本书按章节编写了与教材内容相对应的基础练习题，并在题目之后留了相应的解题空间，以便学生可以随时书写解题步骤，同时也利于教师的批阅。通过同步基础练习题的训练，希望学生能更好地掌握每一章节的内容和重点、难点；本书每个章节还设有综合提高练习题，使部分学有余力的学生可以进一步尝试，开阔解题思路，提高自身解题能力，达到分层次教学的目的；最后，本书收录了微积分课程的期中、期末考试样卷，旨在让学生了解试卷类型和知识分布，帮助学生取得理想的成绩。

图书在版编目（CIP）数据

微积分同步练习与提高. 一 / 余琛妍，李莎莎，涂黎晖主编. —北京：电子工业出版社，2018.2
ISBN 978-7-121-31975-4

I. ①微… II. ①余… ②李… ③涂… III. ①微积分－高等学校－教学参考资料 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 139779 号

策划编辑：章海涛
责任编辑：章海涛　　　　文字编辑：刘　瑀
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　　印张：22.25　字数：273 千字
版　　次：2018 年 2 月第 1 版
印　　次：2018 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：30.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010) 88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：192910558（QQ 群）。

前　　言

微积分是高等学校工科类专业和经管类专业的一门重要的数学基础课。能否用数学的思维、方法去思考、推理及定量分析一些自然现象和经济现象，是衡量民族科学文化素质的重要标志，提高数学素养在培养高素质人才中有着不可替代的重要作用。

本书是与高等教育出版社出版的《微积分学》（上册）（蔡燧林　吴正昌　孙海娜　编著）相配套的学习辅导用书，主要面向使用该教材的学生，也可供使用该教材的教师参考。本书分成三大部分：第一部分为基础题，根据《微积分学》的章节顺序和教学进度，选出适量的习题并留有解题空间，可作为作业供学生练习，同时也为老师批阅和学生复习提供了方便；第二部分为提高题，在原有的习题难度基础上，结合教材内容和考研大纲筛选出具有一定综合性的习题，并给出了详细的解题思路和解答过程，有的还提供了多种解法，该部分可作为学有余力的学生提高数学解题能力的参考题；第三部分为期中、期末样卷，可供学生复习备考使用。

本书的编写自始至终得到了浙江大学宁波理工学院领导的支持和关怀，数学组全体老师对各章节习题进行了筛选、演算和校正，并提出了很多宝贵的意见，编者在此一并向他们表示衷心的感谢。

高等教育出版社出版的《微积分学》（上册）在浙江大学宁波理工学院和其他一些院校已经使用十多年，编写与该教材配套的用书是我们多年的心愿，现将长期教学实践积累的点滴写出来，为数学课程的学习带来更多的方便。由于我们对编写此类书缺乏经验，水平有限，书中难免存在不足之处，恳请同行和读者批评指正。

编　者
浙江大学宁波理工学院

目　录

姓名:__________ 学号:__________ 所在院系:__________ 所在班级:__________

第 1 章 函数

1.1 函数概念

1．求 $f\left(x\right)$。

（1）已知 $f\left(x^2\right)=\frac{1}{x}\left(x<0\right)$；

（2）已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}\left(x\neq 0\right)$；

（3）已知 $f\left(\sin^2 x\right)=\cos 2x+\tan^2 x$；

（4）已知 $f\left(2+\cos x\right)=\sin^2 x+\tan^2 x$。

2．求 $y=\sqrt{\lg\left(5x-4x^2\right)}$ 的定义域。

3．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-\arcsin y=\pi$ 所确定，求 $y=y(x)$ 的定义域。

1.2　函数的几种特性

4．设 $f(x)$ 的定义域为 $(-a,a)(a>0)$，问下列函数的奇偶性。

（1）$\varphi(x)=f(x)+f(-x)$；

（2）$\varphi(x)=f(x)-f(-x)$。

5．设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的严格单调增函数与严格单调减函数，试讨论下列函数在 $(-\infty,\infty)$ 上的单调性。

（1）$f(g(x))$；（2）$g(f(x))$；（3）$f(f(x))$；

（4）$g(g(x))$；（5）$f(x)g(x)$；（6）$(f(x))^2$；

（7）$(g(x))^2$。

6．设常数 δ 满足 $0<\delta<1$，讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$：

（1）在区间 $(0,1)$ 内的有界性；

（2）在区间 $[\delta,1)$ 内的有界性。

1.3 反函数与复合函数

7．求下列函数的反函数 $x=\varphi(y)$，并注明反函数的定义域。

（1） $y=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(-\infty<x<+\infty\right)$；

（2） $y=\begin{cases}\mathrm{e}^{x},-\infty<x\leqslant 0\\ -\frac{1}{x},0<x<+\infty\end{cases}$ 。

1.4 基本初等函数与初等函数

8．求下列函数值：

（1） $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

（2） $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$；

（3）$\arcsin\left(\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$；

（4）$\arctan\left(\tan\dfrac{5\pi}{4}\right)$；

（5）$\arcsin\left(\cos\dfrac{4\pi}{7}\right)$；

（6）$\sin\left[\arccos\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right]$。

第 2 章 极限与连续

2.1 数列的极限

1．设等腰直角三角形 ABC 的斜边 $AB=2$，将斜边分成 $2n$ 等份，作内接台阶形（如图 2-1 所示）。求台阶形面积 A_n，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 是多少？

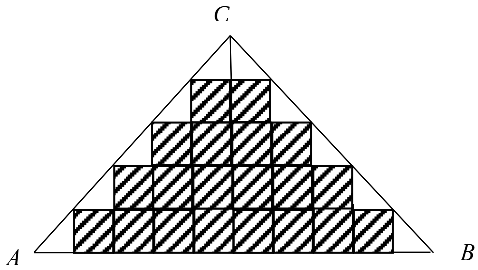

图 2-1

2．设数列 $\{u_n\}$ 的通项 u_n 如下，指出它们是否收敛？若收敛，求出其极限是多少？

（1）$u_n=\dfrac{1}{2^n}$；（2）$u_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；（3）$u_n=n(-1)^n$；

（4）$u_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$；（5）$u_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}$。

2.2　函数的极限

3．指出下列极限是否存在，若存在，则求出其极限值：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$；　（3）$\lim\limits_{x\to 0^-}[x]$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin x$；　（5）$\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$。

4．设 $f(x)$ 如下，指出 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否存在，若存在，则求出该极限值：

（1）$f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$；

（2）$f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ \sin x, & x<0\end{cases}$。

2.3　无穷大与无穷小

5．指出下列各题中，哪个是无穷小，哪个是无穷大；哪个既不是无穷小，也不是无穷大。

（1）当 $x\to 0$ 时　$\tan x$；　（2）当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时　$\tan x$；

（3）当 $x\to 0$ 时　$\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x}$；　（4）当 $x\to\infty$ 时　$x\cos x$；

（5）当 $x\to 0$ 时　$\frac{1}{1-\cos x}$；　（6）当 $x\to 0$ 时　$\frac{1}{\ln|x|}$。

姓名:____________　　学号:____________　　所在院系:____________　　所在班级:____________

2.4　极限的运算

6．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos \pi x}{x+2}$；

（2）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x^2+1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\tan\frac{\pi}{2}x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+1}{\mathrm{e}^x-1}$

7．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$；

（2）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}(a\neq 0)$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{1-4x^2}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{1-4x^3}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2}{1-4x^2}$；

（6）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^{30}(2x+3)^{70}}{(2x+1)^{100}}$；

（7）$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$；

（8）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$。

2.5　判别极限存在的两个重要准则、两个重要极限

8．取“1”，“0”，“∞”，“不存在但也不是无穷”中适当的填入下列空格。

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$ ________________；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x}=$ ________________；

（2）$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=$ ________________；

（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=$ ________________；

9．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{1}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}(a\neq0)$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+a}{2x+a}\right)^{\frac{1}{x}}\left(a\neq 0\right)$。

2.6 无穷小的比较

10．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln\left(1-x\right)}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln\left(1+x\right)}+\dfrac{1}{\ln\left(1-x\right)}\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln\left(1+3^{x}\right)}{\ln\left(1+2^{x}\right)}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$。

11．设当$x\to 0$时，下述各对是等价无穷小。试指出其中的常数A与k各是多少？

（1）$\tan x-\sin x\sim Ax^k$；

（2）$x^3+2x^4 \sim Ax^k$；

（3）$\ln\left(2-\cos^2 x\right) \sim Ax^k$。

2.7 函数的连续性

12．求函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$ 的间断点，并指出其类型。

13．求常数a和b，使

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-ax}-1}{x}, & x<0\\ ax+b, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \arctan\dfrac{1}{x-1}, & x>1\end{cases}$$

在它的定义区间上连续。

14．设 $f\left(x\right)$ 在闭区间 $\left[0,1\right]$ 上连续， $f\left(0\right)=0$， $f\left(1\right)=1$。证明：至少存在一个 $\xi\in\left(0,1\right)$ 使 $f\left(\xi\right)=1-\xi$。

姓名:____________　　学号:____________　　所在院系:____________　　所在班级:____________

第 3 章　导数与微分

3.1　导数的概念

1．求 $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}+\sin x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的导数 $f'\left(0\right)$。

2．求 $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}+\sqrt[3]{1+x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的导数 $f'\left(0\right)$。

3．设 $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+\mathrm{e}^{2x}, & x>0 \\ ax+b, & x\leq 0 \end{cases}$，求常数 a 与 b，使 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续并可导。

4．利用导数定义，求下列各极限：

（1）设 $f'\left(x_0\right)$ 存在，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{h}$；

（2）设 $f'\left(0\right)$ 存在，$f\left(0\right)=0$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(1-\mathrm{e}^h\right)}{h}$；

（3）设 $f'\left(x_0\right)$ 存在，$f\left(x_0\right)\neq 0$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f\left(x_0+h\right)}{f\left(x_0\right)}\right)^{\frac{1}{h}}$。

5．在曲线 $y=\ln x$ 上找点 $\left(x_0,y_0\right)$，使过此点的切线经过原点，并求此切线方程。

姓名:____________　　学号:____________　　所在院系:____________　　所在班级:____________

3.2　导数的四则运算、反函数与复合函数的导数

6．求下列函数的导数：

（1）$y=\dfrac{x^3-4x^2+x+2}{3x^2}$；

（2）$y=x^2\sin x+2x\tan x-\cos\dfrac{\pi}{4}$；

（3）$y=x^2e^x-xe^x$；

（4）$y=\dfrac{\cos x}{3x^2+4}$；

（5） $y = x\arcsin x$；

（6） $y = x^2\arctan x + \tan x$。

7．求下列函数的导数：

（1） $y = \left(7x^3 + 2x - 1\right)^4$；

（2） $y = \dfrac{3x-1}{\left(x^2 - x + 1\right)^{10}}$；

（3） $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$；

（4） $y=\sqrt{\sin x}+\sin\sqrt{x}$；

（5） $y=\sqrt{1+3\cos^2 4x}$；

（6） $y=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$；

（7） $y=x\sec^2 x-\tan 2x$；

（8） $y=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}+\mathrm{e}^{x^{\mathrm{e}}}+x^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}$；

（9） $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$；

（10） $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$；

（11） $y=\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^3$；

（12） $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\left(a>0\right)$；

（13） $y=\mathrm{e}^x\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+\arcsin\mathrm{e}^x$；

（14） $y = x\left(\cos\ln x + \sin\ln x\right)$；

（15） $y = x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right)$；

（16） $y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1 + 2x}$；

（17） $y = x\arccos x - \sqrt{1 - x^2}$；

（18） $y = \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}\right)$。

姓名:___________ 学号:___________ 所在院系:___________ 所在班级:___________

3.3 高阶导数

8．求下列函数的一阶与二阶导数：

（1）$y = x\ln\left(1-x^2\right)$；　　（2）$y = \arcsin\sqrt{x}$。

9．设 $f\left(u\right)$ 二阶可导，求下列各函数的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$：

（1）$y = f\left(\sin^2 3x\right)$；　　（2）$y = \mathrm{e}^{f(2x)}$。

10．求下列函数的n阶导数：

（1）$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$；　　　　（2）$f\left(x\right)=x^2\sin 2x$。

3.4　隐函数求导法

11．求由下列方程确定的函数$y=y\left(x\right)$的指定阶的导数或在指定处的导数：

（1）$x^2+xy+y^3=1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

（2）$y\sin x-\cos\left(x+y\right)=0,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

（3） $y^3=7+\mathrm{e}^{xy},\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$。

12．求下列函数的一阶导数：

（1） $y=\ln\left(\sqrt[3]{x(x+1)/x^2+1}\right)$；

（2） $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$；

（3） $y=\dfrac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}$；

（4） $y=x^{x}+x^{\frac{1}{x}}$。

3.5 函数的微分

13．利用微分运算法则及微分形式不变性，求下列函数的微分：

（1） $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$；

（2） $y=\ln^{2}\left(1+\cos 2x\right)$；

（3） $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^{2}$；

（4） $y = x^{\sin x}$ 。

14．利用微分运算法则及微分形式不变性，求由下列方程确定的函数 $y = y\left(x\right)$ 的 $\mathrm{d}y$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

（1） $x^3 + y^3 - 3axy = 1$；

（2） $xy = \mathrm{e}^{x+y}$ 。

姓名:____________ 学号:____________ 所在院系:____________ 所在班级:____________

第 4 章 微分学的基本定理与导数的应用

4.1 微分学中值定理

1. 设方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有正根 x_0，证明：方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 在区间 $(0,x_0)$ 内必有实根。

2. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$。证明：在 (x_1,x_3) 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$。

3．设 n 为正整数，证明：方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 在 $x > 0$ 处有且仅有一个根。

4.2　洛必达法则

4．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$；

（2）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - x - \cos x}{x^2}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0+}x^x$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$。

姓名:____________　　学号:____________　　所在院系:____________　　所在班级:____________

4.3　函数的单调性与极值、最大值、最小值及不等式问题

5．讨论下列函数的单调递增、减小的区间：

（1）$y = x\sqrt{x+3}$；

（2）$y = x - \ln(1+x)$；

（3）$y = x^2 - \dfrac{2}{x}$。

6．求下列函数的极值点和极值：

（1）$y = x + \mathrm{e}^{-x}$；

（2）$y = x\mathrm{e}^{-x}$；

（3） $y=x+\dfrac{1}{x}$ 。

7．求函数 $f\left(x\right)=x^4-8x^2+3$ 在闭区间 $\left[-2,2\right]$ 上的最大值与最小值。

8．证明下列不等式：

（1）当 $x>0$ 时，$1+\dfrac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；

（2）当 $x<2$ 时，$\left(2x-3\right)\ln\left(2-x\right)-x+1\leqslant 0$；

（3）当 $\mathrm{e} < a < x < \mathrm{e}^2$ 时，$\ln^2 x - \ln^2 a > \frac{4}{\mathrm{e}^2}(x-a)$。

4.4 曲线的凹向、渐近线与函数图形的描绘

9．讨论下列曲线的凹向并求拐点：

（1）$y = x^3 - 5x^2 + 8x$；

（2）$y = x^2 + \frac{1}{x}$。

10．已知点$\left(1,3\right)$是曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点，求常数a与b，并求该曲线的凹凸区间。

11．求下列曲线的渐近线：

（1）$y=\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}+1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$；　　（2）$y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{\left(x-3\right)\left(x-4\right)}$

4.5　泰勒定理

12．求极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-\mathrm{e}^{x^2}\right)\sin x^2}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$。

姓名：____________　　学号：____________　　所在院系：____________　　所在班级：____________

第 5 章 不定积分

5.1 不定积分的概念与性质

1．求下列不定积分：

（1）$\int\sqrt{x}\left(x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$；

（2）$\int\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x$；

（3）$\int\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$；

（4）$\int \tan^2 x \mathrm{d}x$；

（5）$\int \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} \mathrm{d}x$；

（6）$\int \dfrac{2}{1+\cos 2x} \mathrm{d}x$；

（7）$\int \cos^2 \dfrac{x}{2} \mathrm{d}x$；

（8）$\int \frac{2-x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

2．曲线 $y=f\left(x\right)$ 过点 $\left(2,4\right)$，且该曲线上任意点 x 处的切线斜率为 $8-2x$。求该曲线方程。

3．设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$，求 $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x$。

5.2 几种基本的积分方法

4．用凑微分求积分法求下列不定积分：

（1）$\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x$；

（2）$\int \sec^2(2x-1)\mathrm{d}x$；

（3）$\int \frac{x}{9-4x^2}\mathrm{d}x$；

（4）$\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x$；

（5）$\int \cos^3 x\mathrm{d}x$；

（6）$\int \sec^2 x\tan x\mathrm{d}x$；

（7）$\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$；

（8）$\int \frac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$；

（9）$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；

（10）$\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；

（11）$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（12）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}$；

（13）$\int \frac{x^3}{1+x^4}\mathrm{d}x$；

（14）$\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$；

（15）$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；

（16）$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（17）$\int \frac{1}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$；

（18）$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$；

（19）$\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

（20）$\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+x\right)}\mathrm{d}x$。

5．利用变量变换法求下列不定积分：

（1）$\int x\sqrt{x-4}\mathrm{d}x$；

（2）$\int x\left(x+1\right)^{100}\mathrm{d}x$；

（3）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$；

（4）$\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$；

（5）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+4x^2}}$；

（6）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2-9}}$；

（7）$\int\frac{\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$；

（8）$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$。

6．利用分部积分法求下列不定积分：

（1）$\int x\cos 2x\mathrm{d}x$；

（2）$\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

（3）$\int \arctan x\mathrm{d}x$；

（4）$\int \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$；

（5）$\int \sec^3 x\mathrm{d}x$；

（6）$\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$；

（7）$\int x^3\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；

（8）$\int \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}\mathrm{d}x$。

5.3 几种典型类型的积分举例

7．求下列一些典型的不定积分：

（1）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x-15}$ ；

（2）$\int \frac{8x-13}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$；

（3）$\int \frac{x^2}{1-x^4}\mathrm{d}x$；

（4）$\int \frac{x}{\sqrt{2x+x^2}}\mathrm{d}x$；

（5）$\int x\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x$；

（6）$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$。

8．设 $x>0$ 时，$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf''(x)\mathrm{d}x\,(x>0)$。

姓名：___________　　学号：___________　　所在院系：___________　　所在班级：___________

第 6 章　定积分及其应用

6.1　定积分的概念

1．利用定积分的性质，比较下列各对定积分的值的大小，将“>”或“<”填入下列各对积分中间的空格。

（1）$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \quad \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$；

（2）$\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x \quad \int_1^2 x^3 \mathrm{d}x$；

（3）$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x \quad \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x$；

（4）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \mathrm{d}x \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \mathrm{d}x$；

（5）$\int_0^1 \ln(x+1) \mathrm{d}x \quad \int_0^1 x \mathrm{d}x$；

（6）$\int_0^1 (\mathrm{e}^x - 1) \mathrm{d}x \quad \int_0^1 x \mathrm{d}x$。

6.2　定积分的性质及微积分学基本定理

2．计算下列定积分：

（1）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；

（2）$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x}$；

（3）$\int_0^3 |x-1| \mathrm{d}x$；

（4）$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x} \mathrm{d}x$。

3．设 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x, & x<0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$，求 $\int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d}x$。

6.3 定积分的换元法与分部积分法

4．计算下列定积分：

（1）$\int_0^1 x\sqrt{4x+5} \mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^4 (x+1)\left(4x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$；

（4）$\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{(1+x)^3}{\sqrt{1-|x|}}\mathrm{d}x$。

5．计算下列定积分：

（1）$\int_0^1 \arcsin x\mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\mathrm{d}x$。

6．利用华里士公式计算下列定积分：

（1）$\int_0^{2\pi} \sin^4 x\mathrm{d}x$；

（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\mathrm{d}x$；

（3）$\int_{-1}^{5} x\left(5+4x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$。

7．设 $f'(x)$ 连续，且 $f(1)=a$，求 $\int_0^1\left(f(x)+xf'(x)\right)\mathrm{d}x$。

8．设 $f(u)$ 连续，求下列各导数：

（1）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$；

（2）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x}(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$；

（3）$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\int_0^x tf\left(x-t\right)\mathrm{d}t\right)$。

9．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}$。

6.4 反常积分

10．计算下列反常积分，若发散，则请注明它发散：

（1）$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(1+x\right)}$；

（3）$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(x+1\right)}$；

（4）$\int_0^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1-x\right)^2}$。

6.5 定积分在几何上的应用

11．求下列各组曲线所围成的平面图形的面积：

（1）$y=\frac{1}{x},y=x,x=2$；

（2） $y=3-x^2, y=2x$。

12．过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，求该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成的平面图形的面积。

13．求下列各组曲线所围成的平面图形绕指定直线旋转一周所成的旋转体体积：

（1） $y=\mathrm{e}^x$， $y=\mathrm{e}$， y 轴，分别绕 y 轴与直线 $y=\mathrm{e}$；

（2） $y=2x-x^2$， x 轴，分别绕 x 轴和 y 轴。

姓名:__________ 学号:__________ 所在院系:__________ 所在班级:__________

第 7 章 一元微积分学的补充应用

7.1 参数方程与极坐标方程及其微分法

1．求下列由参数式所确定的函数 $y=y\left(x\right)$ 的指定阶的导数或导数值。

（1）$\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

（2）$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}\left(a>0\right)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}$；

（3）设 $f(t)$ 二阶可导，且 $f''(t)\neq 0$ 。求由参数式 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ 。

2．求由参数方程 $\begin{cases} x = t(1-\sin t) \\ y = t\cos t \end{cases}$ 确定的曲线在 $t=0$ 处的切线方程。

3．求极坐标曲线 $r = 2\sin\theta$ 在其上 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 的点处切线的直角坐标方程。

7.2 平面曲线的弧长与曲率

4．求抛物线 $2x=y^2$ 上点 $\left(0,0\right)$ 与点 $\left(\frac{9}{2},3\right)$ 之间的弧长。

5． 求曲线 $\begin{cases} x=a\left(\cos t+t\sin t\right) \\ y=a\left(\sin t-t\cos t\right) \end{cases}\left(a>0\right)$ 上 $t=0$ 与 $t=\pi$ 之间的弧段的长。

6．求摆线 $\begin{cases} x=a\left(t-\sin t\right) \\ y=a\left(1-\cos t\right) \end{cases}$ 上 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的曲率。

7.3 定积分与反常积分在物理上的某些应用

7．两细棒放置在一条水平线上，长各为l，线密度均为常值ρ，最近端相距为a，求两棒之间的引力。

7.4 一元微积分在经济中的某些应用

8．设某商品的需求函数$q=12-\dfrac{1}{2}p$。问：

（1）价格p在什么范围变动时，总收益随p的增大而增大，p在什么范围变动时，总收益随p的增大而减小？

（2）p为何值时，总收益最大，最大值是多少？

姓名:____________　　学号:____________　　所在院系:____________　　所在班级:____________

第 8 章　无穷级数

8.1　无穷级数的基本概念及其性质

1．利用级数敛散性的定义及收敛级数的性质，讨论下列级数的敛散性，在收敛时，并写出收敛和：

（1）$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

（2）$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\cdots$；

（3）$\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n+\cdots$。

姓名:__________ 学号:__________ 所在院系:__________ 所在班级:__________

8.2 正项级数及其判敛法

2．利用比较判别法或比较判别法的极限形式，讨论下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2n}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$；

（5）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$。

3．利用比值判别法讨论下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n$。

4．用适当的方法，讨论下列各题的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{n}\right)$。

8.3 交错级数与任意项级数及它们的判敛法

5．判别下列级数是绝对收敛，条件收敛，还是发散？并说明理由。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}100n}{n-\ln n}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^{\alpha}}$（常数 $\alpha>1$）；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+(-1)^{n}\sin\frac{1}{n}\right]$。

8.4　幂级数及其性质

6．求下列幂级数的收敛半径、收敛区间与收敛域：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$ ；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)3^n}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^{2n-1}}{n\cdot 4^n}$。

8.5　函数展开成幂级数及应用

7．用间接法将下列函数展开为$x-x_0$的幂级数（包括注明成立的范围）：

（1） $f\left(x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x},x_0=0$；

（2） $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x-2x^2},x_0=0$；

（3） $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2},x_0=3$；

（4） $f\left(x\right)=\ln\left(10-x\right),x_0=0$。

8.求下列幂级数的收敛区间及其在收敛区间内的和函数 $s\left(x\right)$：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+1\right)x^{n-1}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$。

姓名:____________　　学号:____________　　所在院系:____________　　所在班级:____________

附录 A.1 极限与连续提高题

1．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln\left(1+2^x\right)}$；

（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；

（5）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{10x}}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$；

（6）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln(2-\cos x)$；

（7）$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}}$；

（8）$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}$；

（9）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$；

（10）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$；

（11）$\lim\limits_{x\to0}\left(\sin^2x+\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

（12）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$。

2．已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求$a$的值。

3．（1）已知$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+ax+b\right)=2$，求$a$，$b$的值。

（2）已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+ax+b\right)=2$，求 a， b 的值。

4．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$。

5．设 $x_1=2,x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}\left(n\in N^+\right)$，求证 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，并求其极限。

6．已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f\left(x\right)}-1}{x^2}=C$，求常数 τ 和 k，使当 $x\to0$ 时， $f\left(x\right)\sim\tau x^k$。

7．若 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin2x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求常数 a。

8．设 $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^n+x^n\right)}{n}\left(x>0\right)$：

（1）求 $f\left(x\right)$；

（2）讨论 $f\left(x\right)$ 的连续性。

9． 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\left[a,b\right]$，若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，证明：存在一点 $\xi\in\left[a,b\right]$，使得 $f\left(\xi\right)=\lambda_1f\left(x_1\right)+\lambda_2f\left(x_2\right)+\cdots+\lambda_nf\left(x_n\right)$。

附录 A.2 导数与微分提高题

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{2x}{1+\mathrm{e}^{x}}, & x>0\end{cases}$，证明：函数在 $x=0$ 处的导数存在，并求 $f'(0)$。

2．已知 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 为连续函数。

（1）求常数 a；

（2）证明 $F(x)$ 的导函数连续。

3．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$（$\alpha$ 为常数）在点 $x=0$ 处的连续性和可导性。

4．设 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^x$。

5．设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f\left(x^3\right)}{x^3}$。

6．设 $f(x),g(x)$ 是定义在 R 上的函数，且有

（1）$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$；

（2）$f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

（3）$f(0)=0,g(0)=1,f'(0)=1,g'(0)=0$。

证明：$f(x)$ 对所有的 x 可导，且 $f'(x)=g(x)$。

7．设函数 $f(x)=(x-1)\left(x^2-2\right)\left(x^3-3\right)\cdots\left(x^{100}-100\right)$，求 $f'(1)$。

8．设 $y=\tan\dfrac{x}{2}+\ln\tan\dfrac{x}{2}+\sqrt{\ln\tan\dfrac{x}{2}}$，求 y'。

9．设 $y=\mathrm{e}^x\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+\arcsin\mathrm{e}^x+\ln\pi$，求 y'。

10．设 $y=\arcsin^2\left(\dfrac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{2}\right)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

11．设 $y=f\left[\phi^2(x)+\varphi\left(x^2\right)\right]$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

12．设 $y=f\left[f\left(\sin\frac{x}{2}\right)\right]$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

13．设 $y=(1+\ln x)^{f^2(\cos x)}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

14．设 $f(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_n(x)$，其中 $\varphi_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 可导且 $\varphi_i(x)\neq 0$，证明：$f'(x)=f(x)\left[\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}+\frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)}+\cdots+\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}\right]$。

15．设 $y=\frac{x}{x^2-3x+2}$，求 $y^{(n)}$。

16．设 $y=x\ln x$，求 $y^{(n)}$。

17．方程 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定 $y=y(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

18．方程 $y=\tan(x-y)$ 确定 $y=y(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

19．已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，求 $y''(0)$。

20．方程 $\cos(xy)=x^2y^2$ 确定 $y=y(x)$，求 $\mathrm{d}y$。

21．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{\mathrm{e}^{n(x-1)}+1}$，问 a，b 为何值时，函数 $f(x)$ 连续且可导，并求 $f'(x)$。

姓名:____________ 学号:____________ 所在院系:____________ 所在班级:____________

附录 A.3 微分学的基本定理与导数的应用

提高题

1．设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(1)=1$，$f(0)=f(2)=0$，证明：$\exists\xi\in(0,2)$ 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=1$。

2．设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且有 $f(2)=5f(0)$，试证明：在 $(0,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$。

3．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}$。

4．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$。

5．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$。

6．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$。

7．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}$。

8．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}$。

9．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$。

10．$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$。

11．$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$。

12．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{e}^x-\sin x-x^2}{(1-\cos x)\arctan 3x}$。

13．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^p}=C\neq 0$，求 p，C。

14．$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$。

15．$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\tan x\right)^{2x-\pi}$。

16．证明：当$x\geqslant 0$时，$\left(1+x\right)\ln\left(1+x\right)\geqslant\arctan x$。

17．证明：当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\tan x>x+\dfrac{1}{3}x^3$。

18．求曲线$y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^x}$的所有渐近线方程。

19．求曲线$y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$的所有渐近线方程。

20．设$f\left(x\right)$在$x=0$处二阶可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf\left(x\right)}{x^3}=0$，求$f\left(0\right)$，$f'\left(0\right)$，$f''\left(0\right)$。

21．设$f\left(x\right)$在$x=a$处二阶可导，$f'\left(a\right)\neq 0$，求$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f'\left(a\right)\left(x-a\right)}-\dfrac{1}{f\left(x\right)-f\left(a\right)}\right]$。

22．设$f\left(x\right)$在$\left[a,+\infty\right)$上连续，$f''\left(x\right)$在$\left(a,+\infty\right)$内存在且大于零，证明：

$$F\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}\left(x>a\right)$$

在$\left(a,+\infty\right)$内递增。

23．设$x>0$，证明：$f\left(x\right)=\left(x-4\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\left(x-2\right)\mathrm{e}^x+2<0$。

姓名:__________ 学号:__________ 所在院系:__________ 所在班级:__________

附录 A.4 不定积分提高题

1. $\int \frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$。
2. $\int \sqrt{5-4x-x^2}\mathrm{d}x$。
3. $\int \frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x$。
4. $\int \frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$。
5. $\int \frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。
6. $\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$。
7. $\int \frac{2x+2}{(x-1)\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$。
8. $\int \frac{1-x-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$。
9. $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$。
10. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$。
11. $\int \frac{\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+5}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$。
12. $\int \frac{1}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}\mathrm{d}x$。
13. $\int \frac{x\arctan x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$。
14. $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$。
15. $\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。
16. $\int \arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}x$。

17. $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$。

18. $\int \frac{1}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。

19. $\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+2+2\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$。

20. $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

21. $\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

22. $\int \mathrm{e}^{\sin x}(x\cos x-\tan x\sec x)\mathrm{d}x$。

23. $\int \frac{1+x^2+x^4}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x$。

24. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\mathrm{d}x$。

25. $\int \frac{1}{x(2+x^{10})}\mathrm{d}x$。

26. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$。

27. $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}\mathrm{d}x$。

28. $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$。

29. $\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$。

30. $\int \left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right]\mathrm{d}x$。

附录 A.5 定积分及其应用提高题

1．将下列极限写成积分和式的形式，利用定积分求这些极限。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}$。

2．设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 不变号，试证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

成立。

3．求下列定积分：

（1）$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$；

（4）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$。

4．求下列定积分：

（1）$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$；

（4）$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{1}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$；

（5）$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$；

（6）$\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}+x^2\right)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$。

5．计算：$\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$。

6．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}\mathrm{d}x$。

7．设 $f''(x)$ 连续，且 $f'(0)=f'(\pi)=-2$，求 $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cos x\mathrm{d}x$ 。

8．求极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^4}-1}$ ；

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\left[1-\cos(\sin t)\right]\mathrm{d}t}{\arctan x^4\cdot\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}$ 。

9．求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\cos(x-t)^2\mathrm{d}t$ 。

10．设 $f(x)$ 连续，求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t$ 。

11．设 $f(u)$ 在 $u=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u)}{u}=A$，求 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^1 f(yt)\mathrm{d}t$ 。

12．设 $f(x)=\int_{\pi}^{x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$ 。

13．设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$，已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值。

14．设 $G(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x$。

15．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增，证明：对于任意的 $x\in[a,b]$，有

$$\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t\geqslant\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

成立。

16．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$f(x)>0$，证明：

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

在 $(0,+\infty)$ 内严格单调递增。

17．求下列反常积分的值：

（1）$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\left(x^2+1\right)}$ ；

（2）$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left|x-x^2\right|}}$ ；

（3）$\int_0^1\dfrac{x\mathrm{d}x}{\left(2-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$ ；

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}$；

（5）$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$。

18．求由 $y=\left|\ln x\right|, x=0.1, x=10, y=0$ 所围成的平面图形的面积。

19．求由 $y=\sin x, y=0\left(0\leqslant x\leqslant \pi\right)$ 围成的平面图形绕 x 轴和 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积。

20．求由 $y=2x-x^2, y=1, y$ 轴，$x=2$ 所围成的平面图形的面积，并求此图形分别绕 x 轴和 $y=1$ 旋转一周所构成的旋转体的体积。

附录 A.6 一元微积分学的补充应用提高题

1．求下列由参数式所确定的函数 $y=y(x)$ 的指定阶的导数或导数值。

（1）$\begin{cases} x=\int_0^{t^2} \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u \\ y=\mathrm{e}^{t^4} \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

（2）$\begin{cases} x=\sin t-\arctan t \\ y=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

（3）$\begin{cases} x=\int_0^t 2e^{-s^2}\mathrm{d}s \\ y=\int_0^t \cos s^2\mathrm{d}s \end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\pi}}$。

2．由参数式 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=t-\ln(1+t) \end{cases}$，确定了 y 为 x 的函数 $y=y(x)$，求曲线 $y=y(x)$ 的凹、凸区间及拐点坐标（区间用 x 表示，点用 (x,y) 表示）。

3．由摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}(a>0)$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 与 $y=a$，$x=0$，$x=2\pi a$ 围成的三块图形记为 D：

（1）求 D 的面积；

（2）求 D 绕直线 $y=a$ 旋转一周生成的旋转体体积 $V_{y=a}$；

（3）求 D 绕 x 轴旋转一周生成的旋转体体积 V_x。

4．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{-y}+x(y-x)=1+x$ 所确定，求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的曲率。

5．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2=\int_0^{y-x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 所确定，求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的曲率半径。

姓名:___________ 学号:___________ 所在院系:___________ 所在班级:___________

附录 A.7 无穷级数提高题

1．设常数$k>0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$（ ）。

A．发散 B．条件收敛

C．绝对收敛 D．收敛或发散与k的取值有关

2．设a是常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$（ ）。

A．发散 B．条件收敛

C．绝对收敛 D．收敛或发散与a的取值有关

3．设常数$a>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$（ ）。

A．发散 B．条件收敛

C．绝对收敛 D．收敛或发散与a的取值有关

4．设$\mu_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数（ ）。

A．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n{}^2$都收敛 B．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n{}^2$都发散

C．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$收敛而$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n{}^2$发散 D．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$发散而$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n{}^2$收敛

5．设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则下述结论不正确的是（ ）。

A．$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$必收敛 B．$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n{}^2-a_{n+1}{}^2\right)$ 必收敛

C．$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n+1})$必收敛 D．$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_{2n+1})$必收敛

6．若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的（ ）。

A．收敛点，收敛点 B．收敛点，发散点

C．发散点，收敛点 D．发散点，发散点

7．用适当的方法，讨论下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^n\cdot n!}{n^n}$；

（3）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)^{\ln n}}{(\ln n)^n}$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$；

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$；

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$。

8．设常数$\alpha>0$，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1+2\alpha}}$的敛散性，并证明你的结论。

9．判定下列级数是绝对收敛、条件收敛、还是发散。并说明理由。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+\sin n}$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$；

（5）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$。

10．证明：级数$\sum_{n=2}^{\infty}\int_n^{n+1}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$条件收敛。

11．求下列幂级数的收敛半径、收敛区间与收敛域：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-1}$；

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$。

12．将函数$f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$展开成$x$的幂级数，并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和。

13．将函数$f(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$在$x=0$处展开成泰勒级数（即麦克劳林级数），并指明成立范围。

14．设$f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，试将$f(x)$展开成$x$的幂级数，并求级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和。

15．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数。

16．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数。

17．求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}$ 的和函数。

18．求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

19．设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $|f'(x)|\leqslant M$（M 为常数）。

证明：（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(f\left(\frac{1}{2^n}\right)-f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$ 绝对收敛；（2）$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ 存在。

姓名:____________ 学号:____________ 所在院系:____________ 所在班级:____________

附录 B.1 《微积分 I 》期中考试样卷（一）

一、 计算题（每题 5 分，共 45 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{3x-x^2-2}\right)$。

2．求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$。

3．求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}\right)$。

4．求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\mathrm{e}^x-x\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

5．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\ln\left(1-x\right)\arcsin x}$。

6．已知 $y=x^{\mathrm{e}}+\mathrm{e}^{x}+x^{x}+\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$，求 y'。

7．设 $y=\mathrm{e}^{\pi}\tan 2x+\left(\arcsin 2x\right)^{3}+\ln\pi$，求 $\mathrm{d}y$。

8．设 $f\left(u\right)$ 二阶可导，$y=f\left(\ln x\right)+\ln\left(f\left(x\right)\right)$，求 y' 及 y''。

9．讨论函数 $f\left(x\right)=2x^3-6x^2-18x-7$ 的单调区间并求极值。

二、　综合题（每题 6 分，共 24 分）

1．求曲线 $x+x^2y^2-y=1$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程和法线方程。（注：过切点与切线垂直的直线为法线）

2．设 $f'\left(x\right)$ 存在，$f\left(0\right)=0$，试利用导数定义求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(1-\mathrm{e}^h\right)}{h}$。

3．设 $y(x)=\arctan \mathrm{e}^{x}-\ln\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}}$，求 $\mathrm{d}y$。

4．求常数 a 和 b 使得函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}, & x>0\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导。

三、　证明题（第一题 5 分，第二题 6 分，共 11 分）

1．证明：方程 $x^{5}+x-1=0$ 有且仅有一个正根。

2．证明：当$x>0$时，$x<\mathrm{e}^x-1<x\mathrm{e}^x$。

四、　填空与选择填空题（每空 2 分，共 20 分）

1．已知a，b均为常数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^{30}(ax+3)^b}{(2x+1)^{100}}=\dfrac{1}{2^{70}}$，则$a=$______________。

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x-x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right]=$_________________。

3．已知$x\to 0$时，$\ln\left(2-\cos^2(2x)\right)$与$Ax^k\ (A,k\in R)$为等价无穷小，则$A=$______，$k=$_______。

4．若函数$f(x)$在$x=x_0$处无定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$x_0$为$f(x)$______________。（选填：连续的点、可去间断点、跳跃间断点、无穷间断点）

5．设$y=\sin(2x+1)$，则$y^{(2015)}=$_____________。（注：$\sin(x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$。）

6．请将适当的函数填入下列横线上，使等式成立：

$\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$___________________；　$\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}$___________________；

$\sec x\tan x\mathrm{d}x=\mathrm{d}$______________；　$x^3\mathrm{d}x=\mathrm{d}$______________________；

姓名:___________ 学号:___________ 所在院系:___________ 所在班级:___________

附录 B.2 《微积分 I 》期中考试样卷（二）

一、 计算题（每题 5 分，共 50 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

2．求极限 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x+\sin x}+x\right)$。

3．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x\arcsin x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$。

4．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{x\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}$。

5．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{x}}$。

6．已知 $y=x^{\mathrm{e}}+\left(3\mathrm{e}\right)^x+\mathrm{e}^{3x}+\ln\pi$，求 y' 及 y''。

7．设 $y=(\sin x)^{x}+(\arcsin 2x)^{3}$，求微分 $\mathrm{d}y$。

8．设 $f(u)$ 二阶可导，求 $y=f(\tan x)+\arctan\left[f(x)\right]$ 的一阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

9．已知方程 $x^{2}+xy+y^{3}=1$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

10．设 $y=\sec\left(\mathrm{e}^{x}\right)-\ln\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}}$，求微分 $\mathrm{d}y$。

二、　综合题（每题 6 分，共 24 分）

1．求曲线 $\ln\left(y+x\right)-\cos\left(xy\right)=x$ 在点 $x=0$ 处的切线方程和法线方程。（注：过切点与切线垂直的直线为法线）

2．设 $f'\left(x_0\right)$ 存在，$f\left(x_0\right)\neq 0$，试利用导数定义求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f\left(x_0+h\right)}{f\left(x_0\right)}\right)^{\frac{1}{h}}$。

3．设 $y=x\ln\left(3+2x\right)$，求 y 对 x 的 2016 阶导数 $y^{(2016)}\left(x\right)$。

（注：$\left[\ln\left(1+x\right)\right]^{(n)}=\left(-1\right)^{n-1}\left(n-1\right)!\left(1+x\right)^{-n}$。）

4．求常数 a、b，使得函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+\mathrm{e}^{2x}, & x>0\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导。

姓名:___________　　学号:___________　　所在院系:___________　　所在班级:___________

三、　证明题（6 分）

设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $\left(0,1\right)$ 上可导，$f\left(1\right)=0$，试证明：在 $\left(0,1\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\xi f'\left(\xi\right)+f\left(\xi\right)=0$。

四、　填空与选择填空题（每空 2 分，共 20 分）

1．已知 a,b 均为常数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x-1\right)^{30}\left(ax+3\right)^{70}}{\left(2x+1\right)^{b}}=\dfrac{1}{2^{30}}$，则 $a=$_____，$b=$_____。

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}-x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right]=$_________________。

3．已知 $x\to 0$ 时，$\tan x-x$ 与 $Ax^{k}\left(A,k\in R\right)$ 为等价无穷小，则 $A=$______，$k=$______。

4．已知 $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{\left(x-4\right)\left(x-5\right)\left(x-6\right)}$，则 $f'\left(1\right)=$____________。

5．请将适当的函数填入下列横线上，使等式成立：d _________ $=\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x$。

6．设 $f\left(x\right)=1+\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 为 $f\left(x\right)$ 的（　　）。

A．连续的点　　B．可去间断点　　C．跳跃间断点　　D．无穷间断点

7．设 $f\left(x\right)$ 一阶可导，下面四个命题正确的是（　　）。

A．若 $f\left(x\right)$ 只有一个零点，则 $f'\left(x\right)$ 必无零点；

B．若 $f'\left(x\right)$ 至少有两个零点，则 $f\left(x\right)$ 必至少有两个零点；

C．若 $f'\left(x\right)$ 无零点，则 $f\left(x\right)$ 至多有一个零点；

D．若 $f\left(x\right)$ 无零点，则 $f'\left(x\right)$ 至多有一个零点。

8．下列四个函数在给定的区间上满足罗尔定理条件的是（　　）。

A． $f\left(x\right)=x^2-5x+6$，$\left[2,3\right]$　　B． $f\left(x\right)=\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}$，$\left[0,2\right]$

C． $f\left(x\right)=x\mathrm{e}^{-x}$，$\left[0,1\right]$　　D． $f\left(x\right)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$，$\left[0,3\right]$

姓名:____________ 学号:____________ 所在院系:____________ 所在班级:____________

附录 B.3 《微积分 I 》期末考试样卷（一）

一、 极限题（共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$。

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\sin x}$。

4. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{x+1}, & x\neq -1\\ a, & x=-1\end{cases}$ 在 $x=-1$ 处连续，求常数 a。

姓名:____________ 学号:____________ 所在院系:____________ 所在班级:____________

二、 导数题（共 3 题，每题 5 分，共 15 分）

1．$y=\cos^2\dfrac{1}{x}+x^{\arctan x}$，求 y'。

2．设函数 $y=f\left(x\right)$ 由方程 $x^2-xy+y^3=1$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\mathrm{d}y$。

3． 设参数方程 $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=\int_1^t \sqrt{1+u^4}\mathrm{d}u \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，并求曲线上在 $t=1$ 相应点处的切线方程。

姓名:____________　　学号:____________　　所在院系:____________　　所在班级:____________

三、　积分题（共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

1．$\int \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$。

2．$\int x\sin 2x\mathrm{d}x$。

3．设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1}, & x\geqslant 0\\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}, & x<0\end{cases}$，求 $\int_{-\ln 3}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$。

4．$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$。

四、 导数与积分应用题（共 2 大题，每大题 10 分，共 20 分）

1．设函数 $y = x\mathrm{e}^{-2x}$，求：

（1）函数在定义域上的最值；

（2）相应曲线的凹、凸区间及拐点。

2．设平面图形由抛物线 $y=\sqrt{x-1}$ 及直线 $x=0$， $y=0$， $y=1$ 所围成。求：

（1）该图形的面积；

（2）该图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积。

姓名:____________ 学号:____________ 所在院系:____________ 所在班级:____________

五、 级数题（共 2 题，第一题 5 分，第二题 10 分，共 15 分）

1．讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$ 的敛散性。

2．求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}$ 的收敛半径、收敛区间及和函数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$ 的值。

六、 证明题（共 2 题，每题 5 分，共 10 分）

1．证明方程 $x^7+x^3-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有且只有一个实根。

2．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\neq 0$，证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\mathrm{d}x$$

并求其中一个积分的值。

姓名:____________　　学号:____________　　所在院系:____________　　所在班级:____________

附录 B.4 《微积分 I 》期末考试样卷（二）

1.（6 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin 3x}-1}{x^2}$。

2.（6 分）$\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n+1}$。

3.（6 分）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$。

4.（6 分）设函数 $y=\arcsin\sqrt{x}+\int_0^{\sin x}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t+\ln\pi$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\mathrm{d}y$。

5.（6 分）设可导函数 $y=f\left(x\right)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-xy^2-1=0$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，并求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处的切线方程。

6.（6 分）设参数方程 $\begin{cases} x=t-\arctan t \\ y=t^3+1 \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

7.（6 分）求 $\displaystyle\int\left(\frac{1}{3^{2-x}}+x\sqrt{4+x^2}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$。

8.（6 分）求$\int \frac{x+2}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x$。

9.（6 分）求$\int \sin 4\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$。

10.（6 分）设函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-x^2}$，

（1）求$f\left(x\right)$在闭区间$\left[0,2\right]$上的最大值和最小值；

（2）估计定积分$\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$值的范围。

11．（6 分）证明：当 $x<0$ 时，$x<\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$。

12．（6 分）求曲线 $f\left(x\right)=x^2-\dfrac{1}{x}$ 的凹凸区间及拐点坐标。

13．（10 分）设平面图形由曲线 $y=\sin x$ 及直线 $y=\dfrac{4}{\pi}x$，$x=\pi$ 所围成，求：

（1）该图形的面积；

（2）该图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积。

14．（7 分）判别下列级数的敛散性。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+3^n}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$。

15．（7 分）将 $f(x)=\frac{1}{(x-2)(x+3)}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并写出展开式成立的范围。

16．（4 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $\left|f'(x)\right| \leqslant 1$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)-f\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right]$ 绝对收敛。

姓名:____________ 学号:____________ 所在院系:____________ 所在班级:____________

附录 B.5 《微积分 I 》期末考试样卷(三)

1.(6 分)设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $x^2+y=\tan(x-y)$ 所确定,且 $y(0)=0$,求 $y'(0)$ 及 $y''(0)$。

2.(6 分)设函数 $y=y(x)$ 是由参数方程 $x=\int_0^t 2e^{-s^2}\mathrm{d}s, y=\int_0^t \cos s^2\mathrm{d}s$ 所确定,求 $y(x)$ 对 x 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=\sqrt{\pi}$ 处的值。

3.(6 分)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos 2x}{x^2}$。

4.（6 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$。

5.（6 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$。

6.（6 分）求积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x$。

7.（6 分）求积分$\int_{-1}^{1}(2+x)^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$。

8.（6 分）证明：当 $0 \leqslant x < +\infty$ 时 $\arctan 3x \leqslant \ln(1+4x)$，且仅当 $x=0$ 时成立等号。

9.（6 分）设常数 $\alpha > 0$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{1+2\alpha}}$ 的敛散性，并证明你的结论。

10．（10 分）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$的收敛半径、收敛区间（指开区间）及收敛域（指收敛点的全体）；并求该幂级数在收敛区间内的和函数。

11．（10 分）设常数$a>0$，函数$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-x$，讨论并求出在闭区间$\left[0,\frac{1}{a}\right]$上$f(x)$的最大值与最小值。

12.（10 分）设平面图形 A 是由曲线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x$ 所围成的有限部分，求 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所生成的旋转体体积。

13.（10 分）证明如下所述的“$\dfrac{0}{0}$”型洛必达（L’Hospital）法则。设

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；

（2）存在 x_0 的某去心邻域 $\overset{0}{\bigcup}(x_0)$，当 $x\in\overset{0}{\bigcup}(x_0)$ 时 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$；

则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (*)$

（为节省时间，可只对于 $x\to x_0+0$（即 $x\to x_0^+$）的情形证明。）

并请举例说明，若条件（3）不成立，但 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}$ 却可以存在，即：$(*)$ 式的左边存在推不出 $(*)$ 式的右边必存在。

14.（6 分）设 $f\left(x\right)=-\cos\pi x+\left(2x-3\right)^{3}+\frac{1}{2}\left(x-1\right)$，讨论方程 $f\left(x\right)=0$ 正好有多少个不同的实根，证明你的结论。

姓名:___________ 学号:___________ 所在院系:___________ 所在班级:___________

附录 B.6 《微积分 I 》期末考试样卷(四)

1.(6 分)设函数 $f(x)=(x-1)(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)$,求 $f'(1)$。

2.(6 分)设函数 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+2 \end{cases}$ 所确定,求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间(用 t 的区间表示,并且也用 x 的区间表示);并请求出拐点坐标(用点 (x,y) 来表示)。

3.(6 分)设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2=\int_0^{y-x} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 所确定,求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的曲率半径。

4．（6 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$。

5．（6 分）设函数$f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+\left(a-1\right)x^n+1}{x^{2n}-ax^n+1}$在区间$\left(0,+\infty\right)$上连续，求常数$a$的值。

6．（6 分）求曲线$y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^x}$的所有渐近线方程。

7．（6 分）求定积分$\int_{-2}^{2}(x-1)^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$。

8．（6 分）计算反常积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x$。

9．（6 分）设常数$a>0$，$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\,\mathrm{d}x$，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$是条件收敛、绝对收敛、发散、还是敛散性与$a$有关？请给出论证。

10.（10 分）设 $f(x)=(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$（当 $x\neq 0$ 时），且在 $x=0$ 处 $f(x)$ 连续，求 $f(0)$ 及曲线 $y=f(x)$ 在其上点 $x=0$ 处的切线方程。

11.（10 分）摆线 L 的参数方程 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$a$ 为正常数，L 与 x 轴所围成的图形为 D，求 D 绕水平直线 $y=2a$ 一周生成的旋转体体积。

12．（10 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛半径、收敛区间（指开区间）及收敛域（指收敛点的全体），并求收敛区间上的和函数。

13．（10 分）

（1）设 $0<x<+\infty$，证明存在 η，$0<\eta<1$，使 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\eta}}$；

（2）求出 η 关于 x 的函数 $\eta=\eta\left(x\right)$ 的具体表达式，并确定当 $0<x<+\infty$ 时，函数 $\eta\left(x\right)$ 的值域。

14.（6 分）

（1）证明$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>0$；

（2）设α是满足$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$的常数，证明$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>\sin\alpha\cdot\ln\left[\frac{\pi^2-\alpha^2}{(2\pi-\alpha)\alpha}\right]$

附录 C.1 习题答案

第 1 章习题答案

1．（1）$-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(x>0\right)$；（2）$x^2-2\left(\left|x\right|\geqslant 2\right)$；（3）$1-2x+\dfrac{x}{1-x}\left(0\leqslant x<1\right)$；（4）$\dfrac{1-\left(x-2\right)^4}{\left(x-2\right)^2}\left(1\leqslant x\leqslant 3\text{且}x\neq 2\right)$。

2. $\left\{x\left|\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1\right.\right\}$。

3. $\left\{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\leqslant x\leqslant\sqrt{\dfrac{3\pi}{2}}\right\}\cup\left\{-\sqrt{\dfrac{3\pi}{2}}\leqslant x\leqslant-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right\}$。

4. （1）偶；（2）奇。

5. （1）（2）严格减函数；（3）（4）严格增函数；（5）（6）（7）均不一定为单调函数。例如设 $f\left(x\right)=x$，$g\left(x\right)=-x$，可说明（5）（6）（7）均不单调。

6. （1）在$\left(0,1\right)$内无上界，有下界。（2）在$\left[\delta,1\right)$内上下均有界。

7. （1）$x=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\left(-\infty<y<+\infty\right)$；（2）$x=\begin{cases}\ln y,0<y\leq 1\\ -\dfrac{1}{y},-\infty<y<0\end{cases}$。

8. （1）$-\dfrac{\pi}{4}$；（2）$\dfrac{2\pi}{3}$；（3）$-\dfrac{\pi}{2}$；（4）$\dfrac{\pi}{4}$；（5）$-\dfrac{\pi}{14}$；（6）$\dfrac{12}{13}$。

第 2 章习题答案

1. $A_n=\dfrac{n-1}{n}$；$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=1$。

2. （1）0；（2）1；（3）不收敛；（4）0；（5）$\dfrac{1}{2}$。

3. （1）0；（2）不存在；（3）-1；（4）不存在；（5）0；（6）1。

4. （1）$f\left(0-0\right)=-\dfrac{\pi}{2}$，$f\left(0+0\right)=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$不存在；（2）$0$。

5. （1）无穷小；（2）无穷大；（3）无穷小；（4）不是无穷小，也不是无穷大；（5）无穷大，或更确切的为$+\infty$；（6）无穷小。

6. （1）$-\dfrac{1}{3}$；（2）0；（3）0；（4）∞。

7. （1）1；（2）$\dfrac{a-1}{2a}$；（3）$-\dfrac{3}{4}$；（4）0；（5）∞；（6）2^{-30}；（7）$-\dfrac{1}{2}$；（8）1。

8. （1）1；（2）0；（3）∞；（4）不存在也不是无穷大。

9. （1）$\frac{1}{2\pi}$；（2）$\frac{3}{5}$；（3）e^{-1}；（4）e^{4}；（5）e^{2a}；（6）$\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}$。

10. （1）-2；（2）1；（3）0；（4）$\sqrt{\mathrm{e}}$；（5）1；（6）$\frac{1}{4}$；（7）$\frac{1}{4}$。

11. （1）$A=\frac{1}{2}$，$k=3$；（2）$A=1$，$k=3$；（3）$A=1$，$k=2$。

12. $x=0$ 为无穷间断点，$x=1$ 为跳跃间断点。

13. $a=\pi$，$b=-\frac{\pi}{2}$。

14. 命 $\varphi(x)=f(x)-1+x$，对 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上用介值定理。

第 3 章习题答案

1. $f'(0)=1$。

2. $f'(0)=\frac{4}{3}$。

3. $a=2$，$b=1$。

4. （1）$2f'(x_0)$；（2）$-f'(0)$；（3）$e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$。

5. 切点 $(\mathrm{e},1)$，切线方程为 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$。

6. （1）$y'=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x^{-2}-\frac{4}{3}x^{-3}$；（2）$y'=2x\sin x+x^2\cos x+2\tan x+2x\sec^2 x$；（3）$y'=x^2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x$；（4）$y'=\frac{-(3x^2+4)\sin x-6x\cos x}{(3x^2+4)^2}$；（5）$y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x$；（6）$y'=2x\arctan x+\frac{x^2}{1+x^2}+\sec^2 x$。

7. （1）$y'=4(7x^3+2x-1)^3(21x^2+2)$；（2）$y'=\frac{-57x^2+47x-7}{(x^2-x+1)^{11}}$；（3）$y'=\frac{-(x+1)}{(x^2+2x+3)^{\frac{3}{2}}}$；（4）$y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$；（5）$y'=-\frac{12\sin 4x\cos 4x}{\sqrt{1+3\cos^2 4x}}$；（6）$y'=\frac{\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^4 x}$；（7）$y'=\sec^2 x+2x\sec^2 x\tan x-2\sec^2 2x$；（8）$y'=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{x^\mathrm{e}}\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1}+\mathrm{e}^\mathrm{e}x^{\mathrm{e}^\mathrm{e}-1}$；（9）$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$；（10）$y'=\csc x$；（11）$y'=\frac{6(1-\cos x)^2\sin x}{(1+\cos x)^4}$；（12）

$y'=\dfrac{a}{a^2+x^2}$；（13） $y'=2\mathrm{e}^x\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}$；（14） $y'=2\cos\ln x$；（15） $y'=\arctan x$；（16） $y'=\dfrac{4x\mathrm{e}^{2x}}{(1+2x)^2}$；（17） $y'=\arccos x$；（18） $y'=\dfrac{1}{8\cos^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}}$。

8．（1）$y'=\ln\left(1-x^2\right)-\dfrac{2x^2}{1-x^2}$；$y''=\dfrac{2x^3-6x}{\left(1-x^2\right)^2}$；（2）$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$；$y''=\dfrac{2x-1}{4\left(x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

9．（1）$y'=f'\left(\sin^2 3x\right)3\sin 6x$；$y''=9\sin^2 6x\cdot f''\left(\sin^2 3x\right)+18\cos 6x\cdot f'\left(\sin^2 3x\right)$；

（2） $y'=2\mathrm{e}^{f(2x)}f'(2x)$； $y''=4\mathrm{e}^{f(2x)}\left[\left(f'(2x)\right)^2+f''(2x)\right]$。

10． （1） $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!(-1)^n}{4}\left[(x-3)^{-n-1}-(x+1)^{-n-1}\right]$；（2） $f^{(n)}(x)=2^n x^2\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}+2x\right)+n2^n x\sin\left(\dfrac{n-1}{2}\pi+2x\right)+n(n-1)2^{n-2}\sin\left(\dfrac{n-2}{2}\pi+2x\right)$。

11.（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{2x+y}{x+3y^2}$；（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\sin(x+y)+y\cos x}{\sin(x+y)+\sin x}$；（3）$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{6}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{3}$。

12.（1） $y'=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$；（2） $y'=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right]$；（3） $y'=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{4}{3-x}-\dfrac{5}{x+1}\right]$；（4） $y'=x^x(\ln x+1)+x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$。

13．（1） $\mathrm{d}y=-\dfrac{\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$；（2） $\mathrm{d}y=\dfrac{-4\sin 2x\cdot\ln(1+\cos 2x)}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$；（3） $\mathrm{d}y=\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x$；（4） $\mathrm{d}y=\mathrm{d}\mathrm{e}^{\sin x\ln x}=x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right)\mathrm{d}x$。

14．（1） $\mathrm{d}y=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}\mathrm{d}x$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$；（2） $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}\mathrm{d}x$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}$。

第 4 章习题答案

1．对于 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$ 在区间$[0,x_0]$上用罗尔定理。

2．用两次罗尔定理。

3．令 $f(x)=x^n+nx-1$，对 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上用介值定理，得到至少存在一个根。又当$x>0$时，有 $f'(x)>0$，则至多有一个根。

4．（1）2；（2）1；（3）$-\dfrac{1}{4}$；（4）$\dfrac{1}{3}$；（5）$\dfrac{1}{2}$；（6）1；（7）$-\dfrac{1}{2}$。

5.（1）$\left[-3,-2\right]$上单调递减，$\left[-2,+\infty\right)$上单调递增；（2）$\left(-1,0\right]$上单调递减，$\left(0,+\infty\right)$上单调递增；（3）$\left(-\infty,-1\right]$上单调递减，$\left(-1,0\right]$上单调递增，$\left(0,+\infty\right)$上单调递增。

6.（1）极小值：$y\big|_{x=0}=1$；（2）极大值：$y\big|_{x=1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；（3）极大值：$y\big|_{x=-1}=-2$，极小值：$y\big|_{x=1}=2$。

7．$\max f\left(x\right)=f\left(0\right)=3$，$\min f\left(x\right)=f\left(\pm2\right)=-13$。

8．略。

9.（1）在$\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right)$内为凸，在$\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$内为凹，拐点$\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{110}{27}\right)$；（2）在$\left(-\infty,-1\right)$内为凹，在$\left(-1,0\right)$内为凸，在$\left(0,+\infty\right)$内为凹，拐点$\left(-1,0\right)$。

10．$a=-\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{9}{2}$；在$\left(-\infty,1\right)$内为凹，在$\left(1,+\infty\right)$内为凸。

11.（1）$x=0$与$y=1$；（2）$y=\dfrac{\pi}{4}$。

12.（1）$-\dfrac{1}{12}$；（2）$\dfrac{1}{3}$。

第 5 章习题答案

1.（1）$\dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-2x+\ln\left|x\right|+C$；（2）$-\dfrac{1}{x}-\arctan x+C$；（3）$\mathrm{e}^x-x+C$；（4）$\tan x-x+C$；（5）$\sin x-\cos x+C$；（6）$\tan x+C$；（7）$\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin x+C$；（8）$x-\dfrac{1}{3}x^3+\arctan x+C$。

2. $y=-x^2+8x-8$。

3. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\mathrm{e}^x+C, & x\leqslant 0\\ \sin x+1+C, & x>0\end{cases}$。

4. （1）$\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2}{3}x+C$；（2）$\dfrac{1}{2}\tan\left(2x-1\right)+C$；（3）$-\dfrac{1}{8}\ln\left|9-4x^2\right|+C$；（4）$-\dfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$；（5）$\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C$；（6）$\dfrac{1}{2}\tan^2 x+C$；（7）$\ln\left|\ln x\right|+C$；（8）$x+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+2\arcsin x+C$；（9）$\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)+C$；（10）$-\dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)+C$；（11）$\dfrac{1}{2}\left(\arcsin x\right)^2+C$；（12）$\ln\left|\arcsin x\right|+C$；（13）$\dfrac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right)+C$；（14）$\dfrac{1}{2}\arctan x^2+C$；（15）$\cos\dfrac{1}{x}+C$；（16）$2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C$；（17）$\arctan\left(x-1\right)+C$；（18）$\dfrac{1}{2}\sec^2 x+C$；（19）$\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sin^2 x\right)+C$；（20）$2\arctan\sqrt{x}+C$。

5. (1) $\frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}+C$;(2) $\frac{(x+1)^{102}}{102}-\frac{(x+1)^{101}}{101}+C$;(3) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$;(4) $\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$;(5) $\frac{1}{2}\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)+C$;(6) $\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{2x}+C$;(7) $\frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^{\frac{3}{2}}-2\left(\mathrm{e}^x+1\right)^{\frac{1}{2}}+C$;(8) $\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$。

6. (1) $\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$;(2) $-\left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^{-x}+C$;(3) $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$;(4) $x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\arctan x+C$;(5) $\frac{1}{2}\ln\left|\sec x+\tan x\right|+\frac{1}{2}\sec x\tan x+C$;(6) $\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$;(7) $\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)e^{x^2}+C$;(8) $\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+C$。

7. (1) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-3}{x+5}\right|+C$;(2) $4\ln\left(x^2+2x+5\right)-\frac{21}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$;(3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$;(4) $\sqrt{2x+x^2}-\ln\left|x+1+\sqrt{2x+x^2}\right|+C$;(5) $-\frac{1}{3}\left(4x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+(x-2)\left(4x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+4\arcsin\frac{x-2}{2}+C$;(6) $\tan x-\sec x+C$。

8. $\mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)+C$。

第 6 章习题答案

1. (1) >;(2) <;(3) >;(4) <;(5) <;(6) >。

2. (1) $\frac{5}{12}\pi$;(2) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{8}$;(3) $\frac{5}{2}$;(4) $4\sqrt{2}$。

3. $\frac{3}{2}-\mathrm{e}^{-1}$。

4. (1) $\frac{506}{375}$;(2) 6π;(3) $\frac{\pi}{4}$;(4) $\frac{133}{40}$。

5. (1) $\frac{\pi}{2}-1$;(2) 2;(3) $2\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$。

6. (1) $\frac{3\pi}{4}$;(2) $\frac{16}{15}$;(3) $\frac{243\pi}{4}$。

7. a。

8. (1) $2x\sqrt{1+x^8}$;(2) $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$;(3) $f(x)$。

9. $\frac{1}{3}$。

10. （1）$\frac{1}{2}$；（2）π；（3）$1-\ln 2$；（4）发散。

11. （1）$\frac{3}{2}-\ln 2$；（2）$\frac{32}{3}$。

12. $\frac{e}{2}-1$。

13. （1）$V_y=(e-2)\pi$，$V_{y=e}=\left(2e-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)\pi$；（2）$V_x=\frac{16}{15}\pi$，$V_y=\frac{8}{3}\pi$。

第 7 章习题答案

1. （1）$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+t^2}{4t}$；（2）$\frac{4}{5}$；（3）$\frac{dy}{dx}=t$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{f''(t)}$。
2. $y=x$。
3. $\sqrt{3}x+y-3=0$。
4. $\frac{1}{2}\left[3\sqrt{10}+\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right]$。
5. $\frac{a}{2}\pi^2$。
6. $\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{1-\cos t}}\bigg|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}a}$。
7. $G\rho^2\ln\frac{(l+a)^2}{(2l+a)a}$。
8. （1）当$0<p<12$时，R随p单调递增，$p>12$时，R随p单调递减；（2）$R_{\max}=R_{p=12}=72$。

第 8 章习题答案

1. （1）收敛，和为$\frac{3}{2}$；（2）收敛，和为$\frac{1}{2}$；（3）发散。
2. （1）收敛；（2）发散；（3）发散；（4）收敛；（5）收敛。
3. （1）发散；（2）收敛；（3）发散。
4. （1）发散；（2）收敛；（3）发散。
5. （1）条件收敛；（2）发散；（3）绝对收敛；（4）发散。
6. （1）$R=2,(-2,2),[-2,2)$；（2）$R=3,(-2,4),[-2,4)$；（3）$R=2,(-1,3),[-1,3]$。
7. （1）$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},x\in(-1,1)$；

（2）$\frac{1}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n2^{n+1}+1\right]x^n,x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$；

（3） $\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{3^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{3^n}(x-3)^n, x\in(0,6)$；

（4） $\ln(10-x)=\ln10-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot10^n}, x\in[-10,10)$。

8.（1） $s(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}, x\in(-1,1)$；（2） $s(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,1)\text{且}x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$。

附录 C.2 提高题答案

极限与连续提高题答案

1.（1）解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}=1$。

（2）解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x\sin x)^{\frac{1}{2}}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$。

（3）解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln 3^x+\ln\left(3^{-x}+1\right)}{\ln 2^x+\ln\left(2^{-x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln 3+\ln\left(3^{-x}+1\right)}{x\ln 2+\ln\left(2^{-x}+1\right)}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln 3+\dfrac{1}{x}\ln\left(3^{-x}+1\right)}{\ln 2+\dfrac{1}{x}\ln\left(2^{-x}+1\right)}=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$。

（4）解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}\left(\dfrac{3\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{2}$。

（5）解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{e^x+e^{4x}+e^{10x}-3}{3}\right)^{\frac{3}{e^x+e^x+e^x-3}}\right]^{\frac{e^x+e^x+e^x-3}{3x}}$，由于

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^x+e^x-3}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{4x}-1}{x}+\frac{e^{10x}-1}{x}\right)=\frac{1}{3}(1+4+10)=5$$

所以原式 $=e^5$。

（6）解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+1-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$。

（7）解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{\ln\left(1+x^2\right)}}=e^{-\frac{1}{2}}$。

（8）解：原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\dfrac{1}{2}$。

（9）解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\cdot x\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\cos x-1}{3}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$。

（10）解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}\left(1-\mathrm{e}^{\cos x-1}\right)}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\mathrm{e}\left(\cos x-1\right)}{\dfrac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{\dfrac{1}{3}x^2}=\dfrac{3}{2}\mathrm{e}$。

（11）解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(\sin^2 x+\cos x-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin^2 x+\cos x-1}}\right\}^{\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}}$，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

所以原式$=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$。

（12）解：原式$=\lim\limits_{x\to +\infty}\left\{\left[1+2\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+1}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+1}}-1\right)}}\right\}^{\frac{2\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+1}}-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)}{x}}$，由于

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+1}}-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)\cdot\left(x^2+1\right)}{x}=2$$

所以原式$=\mathrm{e}^2$。

2. 解：由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{3a}=8$$

所以$3a=\ln 8=\ln 2^3=3\ln 2$，则$a=\ln 2$。

3.（1）解：由

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+ax+b\right)=2$$

可得$a<0$，又

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+ax+b\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(x^2+2x+3\right)-\left(ax+b\right)^2}{\sqrt{x^2+2x+3}-\left(ax+b\right)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(1-a^2\right)x^2+\left(2-2ab\right)x+\left(3-b^2\right)}{\sqrt{x^2+2x+3}-ax-b}=2$$

要使上式成立，必须有$\begin{cases}1-a^2=0\\ \dfrac{2-2ab}{1-a}=2\end{cases}$， 且$a<0$，因此$a=-1$，$b=1$。

（2）解：令$x=-u$，则原式$=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2-2u+3}-au+b\right)=2$，与（1）类似，可得$a=1$，$b=3$。

4．解：因为

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\frac{n^2}{n^2+\pi}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1，\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$。

5．[分析]：如果数列极限存在，记

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x$$

则

$$x=2-\frac{1}{x}\Rightarrow x=1$$

由于

$$x_1=2,\quad x_2=\frac{3}{2},\cdots$$

而其极限为 1，故数列应该单调递减且有下界 1。

下面用数学归纳法证明该数列单调递减且有下界 1。

解：（1） $x_1=2>1$，假设$x_n>1$，则$x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}>1$，因此$\{x_n\}$有下界 1。

（2）由于$x_2<x_1$，假设$x_n<x_{n-1}$，则$x_{n+1}-x_n=\left(2-\dfrac{1}{x_n}\right)-\left(2-\dfrac{1}{x_{n-1}}\right)=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_nx_{n-1}}<0$，即$x_{n+1}<x_n$，因此$\{x_n\}$单调递减。

由（1）（2）可得，数列$\{x_n\}$单调递减且有下界，故$\{x_n\}$收敛。

令$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，等式$x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$两边同时求极限，可得$x=2-\dfrac{1}{x}$，即$x=1$。

6．解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=C$，由

$$\lim_{x\to0}x^2=0，\ C\text{为常数}$$

知

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1\right)=0$$

必有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}f(x)}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^3}=C \text{（常数）}$$

得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2Cx^3}=1$$

即

$$f(x)\sim 2Cx^3$$

所以$k=3$，$\tau=2\mathrm{C}$。

7．解： 由$f(x)$在点$x=0$处连续，有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}+2a\cdot\frac{\mathrm{e}^{2ax}-1}{2ax}\right)=2+2a=f(0)=a$$

所以$a=-2$。

8．解：（1）当$0<x\leqslant\mathrm{e}$时，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^n+x^n\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left\{\mathrm{e}^n\left[1+\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n\right]\right\}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\ln\left[1+\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n\right]}{n}=$$

$$1+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n\right]}{n}=1$$

当$x>\mathrm{e}$时，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^n+x^n\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left\{x^n\left[1+\left(\frac{\mathrm{e}}{x}\right)^n\right]\right\}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln x+\ln\left[1+\left(\frac{\mathrm{e}}{x}\right)^n\right]}{n}=\ln x$$

即 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant\mathrm{e}\\ \ln x, & x>\mathrm{e}\end{cases}$。

（2）在$x=\mathrm{e}$处，$\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to e^+}f(x)=1$，又$f(\mathrm{e})=1$，从而$f(x)$在$x=\mathrm{e}$处连续，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续。

9．证明：由$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上一定能取到最小值m，最

大值M，即$f\left(\left[a,b\right]\right)=\left[m,M\right]$。

又

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\left[a,b\right]$$

有

$$m\le f\left(x_1\right)\le M,\ m\le f\left(x_2\right)\le M,\ \cdots,m\le f\left(x_n\right)\le M$$

又

$$\lambda_i>0\left(i=1,2,\cdots,n\right)$$

且

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$$

于是

$$m=m\left(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\right)\le\lambda_1 f\left(x_1\right)+\lambda_2 f\left(x_2\right)+\cdots+\lambda_n f\left(x_n\right)\le\left(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\right)M$$

即

$$\lambda_1\ f\left(x_1\right)+\lambda_2 f\left(x_2\right)+\cdots+\lambda_n f\left(x_n\right)\in\left[m,M\right]$$

所以至少存在一点$\xi\in\left[a,b\right]$，使$\lambda_1 f\left(x_1\right)+\ \lambda_2 f\left(x_2\right)+\cdots+\lambda_n f\left(x_n\right)=f\left(\xi\right)$。

导数与微分提高题答案

1．解：

$$f_-'\left(0\right)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f\left(0+\Delta x\right)-f\left(0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\frac{\Delta x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{\Delta x}}}=1$$

$$f_+'\left(0\right)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f\left(0+\Delta x\right)-f\left(0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\frac{2\Delta x}{1+\mathrm{e}^{\Delta x}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{2}{1+\mathrm{e}^{\Delta x}}=1$$

于是

$$f_-'\left(0\right)=f_+'\left(0\right)=1$$

所以函数在点$x=0$处的导数存在，且$f'\left(0\right)=1$。

2．解：（1）$F\left(x\right)$在点$x=0$处连续，有

$$\lim_{x\to0}F\left(x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x}{x}=1=F\left(0\right)=a$$

所以$a=1$。

（2）由

$$F'\left(0\right)=\lim_{x\to0}\frac{F\left(x\right)-F\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\mathrm{e}^x\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x-1}{2x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\mathrm{e}^x\cos x}{2}=1$$

所以

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\left(\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x\right)-\mathrm{e}^x\sin x}{x^2}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x\right)-\mathrm{e}^x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\mathrm{e}^x\cos x}{2x}=1$$

所以$F'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是连续的。

3．解：（1）当$\alpha\leqslant 0$时，因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，所以$f(x)$在点$x=0$处间断；

（2）当$\alpha>0$时，因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，所以$f(x)$在$x=0$处连续；

（3）当$0<\alpha\leqslant 1$时，因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，所以$f(x)$在$x=0$处不可导；

（4）当$\alpha>1$时，因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以$f(x)$在$x=0$处可导，并且$f'(0)=0$。

4．解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)-1\right)\right]^{\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)-1}}\right\}^{\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}}$，由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\dfrac{1}{x}\right)-1}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\dfrac{1}{x}\right)-f(0)}{\dfrac{1}{x}}=f'(0)=2$$

所以原式$=\mathrm{e}^2$。

5．解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f\left(x^3\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x^3\right)-f(0)}{x^3}=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)=-2$。

6．证明：$f(x)$，$g(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=1$，$g'(0)=0$。$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$，$g(0)=1$，$g'(0)=0$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=0$$

对任意 x， y，由 $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$ 得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(\Delta x)+f(\Delta x)g(x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x)\left[g(\Delta x)-1\right]}{\Delta x}+\frac{f(\Delta x)g(x)}{\Delta x}\right]=f(x)\cdot 0+1\cdot g(x)=g(x)$$

即 $f'(x)=g(x)$。

7．解法一：按定义求。

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)=(-1)(-2)\cdots(-99)=-(99!)$$

解法二：按公式求。

$$f'(x)=(x-1)'(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)+(x-1)\left[(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)\right]'$$

将 $x=1$ 代入，得 $f'(1)=(1-2)(1-3)\cdots(1-100)=(-1)(-2)\cdots(-99)=-(99!)$。

8．解： $y'=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)'+\frac{1}{2\sqrt{\ln\tan\frac{x}{2}}}\left(\ln\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}+$

$$\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\ln\tan\frac{x}{2}}}\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}+\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}+\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{4\sqrt{\ln\tan\frac{x}{2}}\tan\frac{x}{2}}。$$

9．解： $y'=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+e^x\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}\left(-2e^{2x}\right)+\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{e^x-e^{3x}-e^{3x}+e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=$

$2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$。

10． 解：

$$\frac{dy}{dx}=2\arcsin\left(\frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)=$$

$$\frac{\arcsin\left(\frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{2}\right)}{\sqrt{3-\sin 2\sqrt{x}}}\cdot\frac{\left(\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

11．解： $\frac{dy}{dx}=f'\left[\phi^2(x)+\varphi^2(x)\right]\cdot\left[2\phi(x)\cdot\phi'(x)+2\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\right]$。

12．解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'\left[f\left(\sin\frac{x}{2}\right)\right]\cdot f'\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$。

13．解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left[\mathrm{e}^{\ln(1+\ln x)^{f^2(\cos x)}}\right]'=\left[\mathrm{e}^{f^2(\cos x)\ln(1+\ln x)}\right]'=$

$(1+\ln x)^{f^2(\cos x)}[2f(\cos x)\cdot f'(\cos x)(-\sin x)\ln(1+\ln x)+f^2(\cos x)\cdot\frac{1}{1+\ln x}\cdot\frac{1}{x}]$。

14．证明：$f(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_n(x)$两边取对数得

$$\ln f(x)=\ln\varphi_1(x)+\ln\varphi_2(x)+\cdots+\ln\varphi_n(x)$$

$\varphi_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$可导，且$\varphi_i(x)\neq 0$，方程两边同时对$x$求导得

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{\varphi_1(x)}\cdot\varphi_1'(x)+\frac{1}{\varphi_2(x)}\cdot\varphi_2'(x)+\cdots+\frac{1}{\varphi_n(x)}\cdot\varphi_n'(x)$$

即

$$f'(x)=f(x)\left[\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}+\frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)}+\cdots+\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}\right]$$

证毕。

15．解：$y=\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{x}{(x-2)(x-1)}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1}=2(-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}-$

$(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}=(-1)^n n!\left[\frac{2}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$。

16．解：由

$$y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1，\quad y''=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

所以$y^{(n)}=\left(x^{-1}\right)^{(n-2)}=(-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{x^{n-1}}=(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}(n\geqslant 2)$。

17．解：等式两边对x求导得

$$\left[\arctan\frac{y}{x}\right]'=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right]'$$

即

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{x\cdot y'-y}{x^2}=\frac{2x+2y\cdot y'}{2\left(x^2+y^2\right)}$$

得到$\frac{x\cdot y'-y}{x^2+y^2}=\frac{x+y\cdot y'}{x^2+y^2}$，所以$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=\frac{x+y}{x-y}$。

18．解：等式两边对x求导得

$$y'=\sec^2(x-y)(1-y')$$

所以

$$y'=\frac{\sec^2(x-y)}{1+\sec^2(x-y)}$$

利用三角恒等式得

$$y'=\frac{1+y^2}{2+y^2}=1-\frac{1}{2+y^2}$$

所以$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y''=\dfrac{2y\cdot y'}{\left(2+y^2\right)^2}=\dfrac{2y}{\left(2+y^2\right)^2}\cdot\dfrac{1+y^2}{2+y^2}=\dfrac{2\tan(x-y)\sec^2(x-y)}{\left(1+\sec^2(x-y)\right)^3}$。

19．解：等式两边对x求导得

$$\mathrm{e}^y\cdot y'+6\left(y+xy'\right)+2x=0 \quad （1）$$

两边对x求导得

$$\mathrm{e}^y\cdot\left(y'\right)^2+\mathrm{e}^y\cdot y''+6y'+6y'+6xy''+2=0 \quad （2）$$

由原方程知$\mathrm{e}^{y(0)}=1$，得

$$y(0)=0$$

将$y(0)=0$，$x=0$代入式（1）得

$$y'(0)=0$$

将$y'(0)=0$，$y(0)=0$，$x=0$代入式（2）得

$$y''(0)=-2$$

20．解：方程两边同时求微分得：

$$\mathrm{d}\left[\cos(xy)\right]=\mathrm{d}\left(x^2y^2\right)$$

$$-\sin(xy)\mathrm{d}(xy)=y^2\mathrm{d}\left(x^2\right)+x^2\mathrm{d}\left(y^2\right)$$

即

$$-\sin(xy)\left(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\right)=2xy^2\mathrm{d}x+2yx^2\mathrm{d}y$$

$$-\left[x\sin(xy)+2yx^2\right]\mathrm{d}y=\left[2xy^2+y\sin(xy)\right]\mathrm{d}x$$

故$\mathrm{d}y=-\dfrac{2xy^2+y\sin(xy)}{x\sin(xy)+2yx^2}\mathrm{d}x$。

21．解：当$x<1$时，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n(x-1)}=0$，所以$f(x)=ax+b$；当$x=1$时，$f(x)=\dfrac{a+b+1}{2}$；当$x>1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+(ax+b)\mathrm{e}^{n(1-x)}}{1+\mathrm{e}^{n(1-x)}}=x^2$；故有

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1\\ x^2, & x>1\end{cases}$$

由连续，得$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1=f(1)=\dfrac{a+b+1}{2}$，得$a+b=1$。又$f_-'(1)=a$，$f_+'(1)=2$。

由此得 $a=2$，$b=-1$。所以 $f'(x)=\begin{cases}2, & x\leqslant 1\\ 2x, & x>1\end{cases}$。

微分学的基本定理与导数的应用提高题答案

1．证明：要证原等式成立，只要证：方程 $f'(x)+f(x)-1=0$ 在 $(0,2)$ 内有根，即方程 $\left[f(x)-1\right]'+\left[f(x)-1\right]=0$ 有根。

令

$$F(x)=\mathrm{e}^x\left[f(x)-1\right]$$

则

$$F(0)=-1，F(1)=0，F(2)=-\mathrm{e}^2$$

由于 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，因此 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 内存在最大值，又

$$F(1)>F(0)，F(1)>F(2)$$

因此 $F(x)$ 在 $(0,2)$ 内取得最大值，不妨令 $\exists\xi\in(0,2)$，使得

$$F(\xi)=\max_{0\leqslant x\leqslant 2}F(x)$$

根据费马定理，$F'(\xi)=0$，即 $\exists\xi\in(0,2)$，使得

$$f'(\xi)+f(\xi)=1$$

2．证明：要证原等式成立，只要证 $\dfrac{(1+\xi^2)f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{(1+\xi^2)^2}=0$ 成立，即只要证 $\left[\dfrac{(1+x^2)f'(x)-2xf(x)}{(1+x^2)^2}\right]_{x=\xi}=0$ 成立，只要证 $\left[\dfrac{f(x)}{1+x^2}\right]'_{x=\xi}=0$ 成立。设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{1+x^2}$，则只要证 $F'(\xi)=0$ 成立。

由 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上可导，又 $F(0)=f(0)=\dfrac{f(2)}{5}=\dfrac{f(2)}{1+2^2}=F(2)$，根据罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使 $F'(\xi)=0$，因为每一步可逆，所以原等式成立。

3．解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{-\frac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{-\frac{2}{3}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x}{-\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{2}$。

4．解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x}\right)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$。（注：分子 $\ln\left(1+\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x}\right)\sim\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x},x\to 0$。）

5．解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}=$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2\cos^2 x+2\sin^2 x}{12x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin^2 x}{12x^2}=\dfrac{1}{3}$。

6．解法一：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^4}=$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2x\cos^2 x+x^2\sin 2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos 2x-2\cos^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}{12x^2}=$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-4\sin 2x+6\sin 2x+12x\cos 2x-4x^2\sin 2x}{24x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{12x}+\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{x\sin 2x}{6}\right)=$
$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$。

解法二：利用带佩亚诺余项的泰勒公式，有

$$\sin^2 x=\left[x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right]^2=x^2-\frac{1}{3}x^4+o_1\left(x^4\right)$$

$$x^2\cos^2 x=x^2\left[1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right]^2=x^2-x^4+o_2\left(x^4\right)$$

则

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^4}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{3}x^4+o_1\left(x^4\right)-x^2+x^4-o_2\left(x^4\right)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)}{x^4}=\frac{2}{3}$$

7．解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\dfrac{1}{x-1}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^2}{x-1}\cdot\dfrac{e^x\left(x-1\right)+1}{x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\left(x-1\right)+1}{x^2}=$
$-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\left(x-1\right)+e^x}{2x}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cdot x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$。

8．解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{6x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2}=\dfrac{1}{12}$。

9．解：原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^x\left(\ln x+1\right)}{-1+\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\left[1-x^x\left(\ln x+1\right)\right]}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^x\left(\ln x+1\right)}{1-x}\cdot1=$
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\left[x^x\left(\ln x+1\right)^2+x^x\cdot\dfrac{1}{x}\right]}{-1}=2$。

10．解：令 $u=\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{u\to0}\left[\frac{1}{u}-\frac{\ln(1+u)}{u^2}\right]=\lim\limits_{u\to0}\frac{u-\ln(1+u)}{u^2}=$

$\lim\limits_{u\to0}\frac{1-\frac{1}{1+u}}{2u}=\lim\limits_{u\to0}\frac{u}{2u(1+u)}=\frac{1}{2}$。

11．解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\tan^x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x}\right)$，令 $u=\frac{2}{x}$，有

$$\lim_{x\to+\infty}\tan^x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x}\right)=\lim_{u\to0^+}\tan^{\frac{2}{u}}\left(\frac{\pi}{4}+u\right)=\mathrm{e}^{\lim\limits_{u\to0^+}\frac{2\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+u\right)}{u}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{u\to0^+}\frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+u\right)}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+u\right)}=\mathrm{e}^4$$

12．解法一：原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\mathrm{e}^x-\sin x-x^2}{\frac{1}{2}x^2\cdot(3x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-\cos x-2x}{\frac{9}{2}x^2}=$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+2)\mathrm{e}^x+\sin x-2}{9x}=\frac{1}{9}\lim\limits_{x\to0}\left[\mathrm{e}^x+\frac{\sin x}{x}+\frac{2(\mathrm{e}^x-1)}{x}\right]=\frac{4}{9}$。

解法二：利用带佩亚诺余项的泰勒公式，原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\mathrm{e}^x-\sin x-x^2}{\frac{1}{2}x^2\cdot(3x)}=$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\left[1+x+\frac{x^2}{2}+o_1\left(x^2\right)\right]-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o_2\left(x^3\right)\right]-x^2}{\frac{3}{2}x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{\frac{3}{2}x^3}=\frac{4}{9}$。

13．解：由

$$\lim_{x\to0}\left(2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=0$$

得

$$\lim_{x\to0}x^p=0$$

可知

$$p>0$$

于是

$$\lim_{x\to0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^p}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{px^{p-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-4x^2}{px^{p-1}\left(1-x^4\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-4x^2}{px^{p-1}}=C\neq0$$

因此 $2=p-1$，得 $p=3$，$C=-\frac{4}{3}$。

14．解：原式$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}\left(\frac{0}{0}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{-2\csc^2 2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{-2\sin x\cos x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{-\sin 2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\sin 2x)}=\mathrm{e}^{-1}$。

15．解：原式$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)^2}{-2\sin x\cos x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)^2}{-\sin 2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{4(2x-\pi)}{-2\cos 2x}}=$ $e^0=1$。

16．证明：记 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，有

$$f(0)=0$$

当 $x\geqslant 0$ 时，有

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}\geqslant 0$$

所以 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时单调递增。

从而当 $x\geqslant 0$ 时，有

$$f(x)\geqslant f(0)=0$$

即

$$(1+x)\ln(1+x)\geqslant\arctan x$$

17．证明：令 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$，有 $f(0)=0$，而

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x+x)(\tan x-x)$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x+x>0$，记

$$g(x)=\tan x-x$$

则有 $g(0)=0$，又

$$g'(x)=\sec^2 x-1=\tan^2 x>0$$

所以 $g(x)$ 单调递增。

从而当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$g(x)>g(0)=0$$

从而 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $f(x)>f(0)=0$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，证毕。

18．解：（1）因为 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{1-\mathrm{e}^x}\right)=\infty$，所以 $x=0$ 是一条垂直渐近线；

（2）因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{1-\mathrm{e}^x}\right)=0$，所以 $y=0$ 是一条沿 $x\to+\infty$ 方向的水平渐近线；

（3）因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^x}\right)=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{1-\mathrm{e}^x}-x\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{xe^x}{1-e^x}\right)=0$，所以 $y=x$ 是一条沿 $x\to-\infty$ 方向的斜渐近线；

总之，共有三条渐近线，分别是 $x=0$， $y=0$， $y=x$。

19．解：（1）因为 $\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$，所以 $x=0$ 是一条垂直渐近线；

（2）因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{x\left(1-e^{-x^2}\right)}=0$， $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$，所以 $y=1$ 是一条沿 $x\to\infty$ 方向的水平渐近线；

总之，共有两条渐近线，分别是 $x=0$， $y=1$。

20．解： $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，将 $f(x)$， $\sin x$ 分别在 $x=0$ 处按佩亚诺余项泰勒公式展开有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o_1\left(x^2\right)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o_2\left(x^3\right)$$

因为

$$\sin x+xf(x)=x-\frac{x^3}{6}+o_2\left(x^3\right)+xf(0)+x^2f'(0)+x^3\frac{f''(0)}{2}+o_1\left(x^3\right)=$$

$$\left(1+f(0)\right)x+f'(0)x^2+\left(\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+o\left(x^3\right)$$

而

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$$

从而

$$1+f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad \frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6}=0$$

即

$$f(0)=-1,\quad f'(0)=0,\quad f''(0)=\frac{1}{3}$$

21．解： $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导，将 $f(x)$ 在 $x=a$ 处按佩亚诺余项泰勒公式展开至 $n=2$，有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(0)}{2!}(x-a)^2+o\left((x-a)^2\right)$$

于是

$$\frac{1}{f'(a)(x-a)}-\frac{1}{f(x)-f(a)}=$$

$$\frac{1}{f'(a)(x-a)}-\frac{1}{f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+o\left((x-a)^2\right)}=$$

$$\frac{f'(a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)+o(x-a)-f'(a)}{f'(a)(x-a)\left[f'(a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)+o(x-a)\right]}=$$

$$\frac{\frac{f''(a)}{2}+\frac{o(x-a)}{x-a}}{f'(a)\left[f'(a)+\frac{f''(x-a)}{2}+o(x-a)\right]},$$

因此$\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{f'(a)(x-a)}-\frac{1}{f(x)-f(a)}\right]=\frac{\frac{f''(a)}{2}}{\left[f'(a)\right]^2}=\frac{f''(a)}{2\left[f'(a)\right]^2}$。

22．证明： 由$F(x)$在$(a,+\infty)$内连续，且$F'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-\left[f(x)-f(a)\right]}{(x-a)^2}=$

$\frac{f'(x)(x-a)-f'(c)(x-a)}{(x-a)^2}(a<c<x)=\frac{f'(x)-f'(c)}{x-a}=\frac{f''(\xi)(x-c)}{x-a}$，其中

$a<c<\xi<x$，且$f''(\xi)>0$，得$F'(x)>0$，所以$F(x)$在$(a,+\infty)$内严格递增。

23．证法一：由$f(x)=(x-4)e^{\frac{x}{2}}-(x-2)e^x+2$，得$f(0)=0$，$f'(x)=$

$\left(\frac{x}{2}-1\right)e^{\frac{x}{2}}-(x-1)e^x$，$f'(0)=0$，$f''(x)=\frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}}-xe^x=xe^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}-e^{\frac{x}{2}}\right)$；而当$x>0$时，

$e^{\frac{x}{2}}>1>\frac{1}{4}$，所以当$x>0$时，$f''(x)<0$。

于是知，当$x>0$时，$f'(x)<0$，从而知当$x>0$时，$f(x)<0$。

证法二：由证法一，有$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2<0$。

不定积分提高题答案

1．解：$\int\frac{x}{(1+x)^3}dx=\int\frac{1+x-1}{(1+x)^3}dx=\int\frac{1}{(1+x)^2}d(x+1)-\int\frac{1}{(1+x)^3}d(x+1)=$

$-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}+C$。

2．解：$\int\sqrt{5-4x-x^2}dx=\int\sqrt{9-(x+2)^2}dx\xrightarrow[dx=3\cos tdt]{x+2=3\sin t}\int 3\cos t\cdot 3\cos tdt=$

$\frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x+2}{3}+\frac{(x+2)\sqrt{5-4x-x^2}}{2}+C$。

3．解：$\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int(\ln x-1)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\left(\frac{\ln x-1}{x}-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1-\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C=$
$\frac{-\ln x}{x}+C$。

4．解：$\int\frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\mathrm{d}(1-x)^2=$
$\int\arcsin(1-x)\mathrm{d}\left(\sqrt{1-(1-x)^2}\right)=\sqrt{1-(1-x)^2}\arcsin(1-x)-\int\sqrt{1-(1-x)^2}\cdot$
$\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2x-x^2}\arcsin(1-x)+x+C$。

5．解：$\int\frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\ln(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\left[\frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}-\int\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x\right]=$
$-\frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}+x-\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=-\frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}+x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C$。

6．解：$\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x=\int x\ln(1+x)\mathrm{d}x-\int x\ln(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln(1+x)\mathrm{d}(x^2)-$
$\frac{1}{2}\int\ln(1-x)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\left[x^2\ln(1+x)-\int\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x\right]-\frac{1}{2}\left[x^2\ln(1-x)+\int\frac{x^2}{1-x}\mathrm{d}x\right]=$
$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\int x^2\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\int\frac{1-x^2-1}{1-x^2}\mathrm{d}x=$
$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+C=$
$\frac{1}{2}(x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x+C$。

7．解：$\int\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right]\mathrm{d}x=\ln|x-1|-$
$\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}+C$。

8．解：$\int\frac{1-x-x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{-(x^2+1)-x+2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+$

$2\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x=-\arctan x+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+2\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$，$\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x\xlongequal[dx=\sec^2 t\mathrm{d}t]{x=\tan t}$

$\int\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}dt=\int\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$

$\frac{1}{2}\left(\arctan x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)+C$。所以原式$=\frac{1+2x}{2\left(x^2+1\right)}+C$。

9．解：$\int\frac{1+\sin x}{\sin x\left(1+\cos x\right)}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{\sin x\left(1+\cos x\right)}\right]\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+$

$\int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\tan\frac{x}{2}+\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{4\cos^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{2\sin x}\mathrm{d}x=\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{2}+$

$\frac{1}{2}\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$。

10．解：$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x\xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{4at}{\left(t^2+1\right)^2}\mathrm{d}t]{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=t}4a\int\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^2}\mathrm{d}t=4a\left[\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\mathrm{d}t\right]=$

$4a\arctan t-4a\int\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\mathrm{d}t=4a\arctan t-2a\arctan t-\frac{2at}{t^2+1}+C=2a\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-$

$\sqrt{a^2-x^2}+C$。

11．解：$\int\frac{\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+5}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+5}\mathrm{d}\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+5\right)=$

$\frac{2}{3}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+5\right]^{\frac{3}{2}}+C$。

12．解：$\int\frac{1}{\left(x+1\right)^3\sqrt{x^2+2x}}\mathrm{d}x\xlongequal[dx=\sec t\tan t\mathrm{d}t]{x+1=\sec t}\int\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec^3 t\cdot\tan t}\mathrm{d}t=\int\cos^2 t\mathrm{d}t=$

$\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}}{\left(x+1\right)^2}+C$。

13．解：$\int\frac{x\arctan x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\xlongequal[x=\tan t]{\arctan x=t}\int\frac{\tan t\cdot t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int t\sin t\mathrm{d}t=-\int t\mathrm{d}\left(\cos t\right)=$

$-\left(t\cos t-\int\cos t\mathrm{d}t\right)=-t\cos t+\sin t+C=\dfrac{-\arctan x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$。

14．解：$\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x\xlongequal[x=\sin t]{\arcsin x=t}\int t^2\cos t\mathrm{d}t=t^2\sin t-2\int t\sin t\mathrm{d}t=t^2\sin t+2\left(t\cos t-\int\cos t\mathrm{d}t\right)=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C=x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x+C$。

15．解：$\int\dfrac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\arctan\mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)=-\left[\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x-\int\dfrac{\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x\right]=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+\int\dfrac{1+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)+C$。

16．解：$\int\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}x\xlongequal[x=\sin^2 t]{\arcsin\sqrt{x}=t}\int t\cdot\sin 2t\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}\int t\mathrm{d}(\cos 2t)=-\dfrac{1}{2}\left[t\cos 2t-\int\cos 2t\mathrm{d}t\right]=-\dfrac{1}{2}t\cos 2t+\dfrac{1}{4}\sin 2t+C=-\dfrac{1}{2}(1-2x)\arcsin\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C$。

17．解：$\int\dfrac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=-\left(\dfrac{x\mathrm{e}^x}{x+1}-\int\dfrac{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{x+1}\mathrm{d}x\right)=-\dfrac{x\mathrm{e}^x}{x+1}+\mathrm{e}^x+C=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}+C$。

18． 解：$\int\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}-\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right)\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}-\arctan\mathrm{e}^x+C$。

19． 解：$\int\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+2+2\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2+1}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2+1}=\arctan\left(\mathrm{e}^x+1\right)+C$。

20．解：$\int\dfrac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal[\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t]{x=\sin t}\int\dfrac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{(\sin t+\cos t)+(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}\ln|\sin t+\cos t|+C=\dfrac{1}{2}\arcsin x+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|+C$。

21．解：$\int\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal[\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t]{x=\sin t}\int\dfrac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\cos t}=\int\dfrac{1+\cos t-1}{1+\cos t}\mathrm{d}t=t-\int\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t=t-\tan\dfrac{t}{2}+C=\arcsin x-\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$。

22．解：$\int e^{\sin x}\left(x\cos x-\tan x\sec x\right)dx=\int xd\left(e^{\sin x}\right)-\int e^{\sin x}d\left(\sec x\right)=xe^{\sin x}-$
$\int e^{\sin x}dx-e^{\sin x}\sec x+\int e^{\sin x}dx=\left(x-\sec x\right)e^{\sin x}+C$。

23．解：$\int\frac{1+x^2+x^4}{x^3\left(1+x^2\right)}dx=\int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{x}{1+x^2}\right)dx=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$

24．解法一：

令$\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t$，$x=\frac{1}{t^2+1}$，$dx=-\frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}dt$，原式=$\int\left(t^2+1\right)t\cdot\frac{-2t}{\left(t^2+1\right)^2}dt=$

$=-2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=-2\left(t-\arctan t\right)+C=-2\sqrt{\frac{1-x}{x}}+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C$。

解法二：令 $x=\sin^2 t$，$dx=2\sin t\cos tdt$，原式$=\int\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\cdot 2\sin t\cos tdt=$
$2\int\cot^2 tdt=2\int\left(\csc^2 t-1\right)dt=2\left(-\cot t-t\right)+C=-2\sqrt{\frac{1-x}{x}}-2\arcsin\sqrt{x}+C$。

25．解：$\int\frac{1}{x\left(2+x^{10}\right)}dx=\int\frac{x^9}{x^{10}\left(2+x^{10}\right)}dx=\frac{1}{10}\int\frac{d\left(x^{10}\right)}{x^{10}\left(2+x^{10}\right)}=$
$\frac{1}{20}\int\left(\frac{1}{x^{10}}-\frac{1}{2+x^{10}}\right)d\left(x^{10}\right)=\frac{1}{20}\ln\left(\frac{x^{10}}{2+x^{10}}\right)+C$。

26．解：$\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int xd\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}dx=x\tan\frac{x}{2}-$
$\int\tan\frac{x}{2}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx=x\tan\frac{x}{2}+C$。

27．解：$\int\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\int\ln\left(1+x^2\right)d\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}-\int\frac{2x}{x^2\left(1+x^2\right)}dx\right]$
$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=-\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2x^2}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$。

28．解：$\int\frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}dx=\frac{1}{4}\int\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}\right)dx=$
$\frac{1}{12}\left[\left(2x+3\right)^{\frac{3}{2}}-\left(2x-1\right)^{\frac{3}{2}}\right]+C$。

29．解：$\int\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2+1-x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx+\int\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx\right)=$

$$\frac{1}{2}\left[\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}-\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\right]+C=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C。$$

30． 解：$\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right]\mathrm{d}x=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int f^2(x)\mathrm{d}\frac{1}{(f'(x))^2}=$

$$\int\frac{f(x)}{f'(x)}dx+\frac{1}{2}\left[\frac{f^2(x)}{(f'(x))^2}-\int\frac{2f(x)f'(x)}{(f'(x))^2}dx\right]=\frac{1}{2}\frac{f^2(x)}{(f'(x))^2}+C。$$

定积分及其应用提高题答案

1．(1) 解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{\sec t}\mathrm{d}t=$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t\mathrm{d}t=\ln\left|\sec t+\tan t\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)。$$

(2) 解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$。

2．证明：令 $F(t)=\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x$，$G(t)=\int_a^t g(x)\mathrm{d}x$，由柯西中值定理可得，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

即

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)}=f(\xi)$$

证毕。

3．(1) 解：$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Bigg|_0^3-\int_0^3 x\cdot\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\mathrm{d}x=\pi-$

$\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$。其中 $\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x\xlongequal[x=t^2]{\sqrt{x}=t}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1+t^2-1}{1+t^2}\mathrm{d}t=2(t-\arctan t)\Big|_0^{\sqrt{3}}=$

$2\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$。所以，原式$=\pi-\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$。

（2）解：$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x \xlongequal[x=1/2\ln(1-t^2)]{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}=t} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t\cdot\dfrac{t}{1-t^2}\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{1-t^2-1}{1-t^2}\mathrm{d}t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=$

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$。

（3）解：$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x \xlongequal[x=(t^2+1)/2]{\sqrt{2x-1}=t} \int_0^1 \mathrm{e}^t\cdot t\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^t\Big|_0^1-\mathrm{e}^t\Big|_0^1=1$。

（4）解：$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t]{x=-t} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$，$2I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x\cos x}{1+\mathrm{e}^x}+\dfrac{\cos x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x=$

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\mathrm{d}x=\ \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$，所以$I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

4.（1）解：$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x \xlongequal[x=1-t^2]{\sqrt{1-x}=t} \int_1^0(1-t^2)t(-2t)\mathrm{d}t=\int_0^1(2t^2-2t^4)\mathrm{d}t=\dfrac{4}{15}$。

（2）解：$\int_0^4\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xlongequal[x=t^2]{\sqrt{x}=t} 2\int_0^2 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=2\left(t\mathrm{e}^t\Big|_0^2-\int_0^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)=2\left(2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^t\Big|_0^2\right)=2(\mathrm{e}^2+1)$。

（3）解：$\sqrt{1-x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$是$[-1,1]$上的奇函数，所以

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=0$$

（4）解：$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{1}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t]{x=\tan t} \int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sec^2 t}{(2\tan^2 t+1)\sec t}\mathrm{d}t=$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos t}{\sin^2 t+1}\mathrm{d}t=\arctan(\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\arctan\dfrac{1}{2}$。

（5）解：$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x \xlongequal[dx=\cos t\mathrm{d}t]{x-1=\sin t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$。

（6）解：$\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}+x^2\right)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t]{x=\sin t}$

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\cos^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{8}$。

5．解：$I=\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi-t} \int_{\pi}^{0}\dfrac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}(-\mathrm{d}t)=\pi\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-I$，$2I=$

$\pi\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\dfrac{\pi^2}{2}$，则$I=\dfrac{\pi^2}{4}$。

6．解：令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\cos t)}{f(\cos t)+f(\sin t)}\mathrm{d}t$，

$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\cos x)+f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$，则 $I=\dfrac{\pi}{4}$。

7．解：$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}\left(f'(x)\right)=$

$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x+\cos xf'(x)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x+4+\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}\left(f(x)\right)$

$=\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x+4+f(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=4$。

8．解：（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^4}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)\cdot2\sin x\cos x}{2x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^3 x\cos x}{2x^3}=1$。

（2）解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\left[1-\cos(\sin t)\right]\mathrm{d}t}{\arctan x^4\cdot\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\left[1-\cos(\sin t)\right]\mathrm{d}t}{x^4\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[1-\cos\left(\sin x^2\right)\right]2x}{-3x^5}=-\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sin x^2\right)^2}{x^4}=-\dfrac{1}{3}$。

9．解：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\cos(x-t)^2\mathrm{d}t\ \underset{\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u}{\overset{x-t=u}{=\!=}}\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^0\cos u^2(-\mathrm{d}u)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\cos u^2\mathrm{d}u=\cos x^2$。

10．解：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t\ \underset{\mathrm{d}t=\mathrm{d}u}{\overset{x+t=u}{=\!=}}\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x+1}^{x+2}f(u)\mathrm{d}u=f(x+2)-f(x+1)$。

11．解：$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^1 f(yt)\mathrm{d}t\ \overset{yt=u}{=\!=}\ \lim\limits_{y\to0}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^y\dfrac{1}{y}f(u)\mathrm{d}u=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{\int_0^y f(u)\mathrm{d}u}{y}\right)=$

$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{yf(y)-\int_0^y f(u)\mathrm{d}u}{y^2}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)}{y}-\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)}{2y}=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}$。

12．解：$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x=0-\int_0^{\pi}x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\cos x\Big|_0^{\pi}=-2$。

13．解：设 $2x-t=u$，$t=2x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，得

$$\int_x^{2x}(2x-u)f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\arctan x^2$$

两边同时对 x 求导，得

$$2\left\{\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u+x\left[2f(2x)-f(x)\right]\right\}-\left[2xf(2x)\cdot2-xf(x)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^4}$$

$$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - xf(x) = \frac{x}{1+x^4}$$

所以

$$\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[xf(x) + \frac{x}{1+x^4}\right]$$

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[1\cdot f(1) + \frac{1}{1+1}\right] = \frac{3}{4}$$

14．解：$\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x = xG(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xG'(x)\mathrm{d}x = G(1) - \int_0^1 xe^{-x^2}\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^1 =$ $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1}-1\right)$。

15．解：设

$$F(x) = \int_a^x tf(t)\mathrm{d}t - \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

则

$$F'(x) = xf(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{a+x}{2}f(x) = \frac{1}{2}f(x)(x-a) - \frac{1}{2}f(\xi)(x-a)$$

$$= \frac{1}{2}(x-a)\left[f(x) - f(\xi)\right]$$

其中

$$\xi \in (a,x)$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增，$x\in[a,b]$。所以 $F'(x)\geqslant 0$，即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，则 $F(x)\geqslant F(a)=0$。即

$$\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t \ge \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

16．解：

$$F'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2} = \frac{f(x)\left[\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$= \frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

由于 $t\in[0,x]$，且 $f(x)>0$，所以 $F'(x)\geqslant 0$，即 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调递增。

17．（1）解：$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^2+1\right)} = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]\Big|_1^{+\infty} =$

$\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_1^{+\infty} = = \frac{1}{2}\ln 2$。

（2）解：$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$

$=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_{1}^{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$。

（3）解：$\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\left(2-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cdot\cos t\mathrm{d}t}{\left(2-\sin^2 t\right)\cos t}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\left(\cos t\right)}{1+\cos^2 t}=$

$-\arctan\left(\cos t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$。

（4）解：$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\overset{x=1/t}{=\!=\!=}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)\left(1+\sqrt{t}\right)}$，$2I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=$

$\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$，所以 $I=\frac{\pi}{4}$。

（5）解：$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\left[\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right]=$

$\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$。

18．解：$S=-\int_{0.1}^{1}\ln x\mathrm{d}x+\int_1^{10}\ln x\mathrm{d}x=\left(-x\ln x+x\right)\Big|_{0.1}^{1}+\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^{10}=-8.1+9.9\ln 10$。

19．解：$V_x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}$；$V_y=2\pi\int_0^{\pi}x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=$

$2\pi^2$。

20．解：$S=2-\int_0^2\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$；$V_x=2\pi-\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{14}{15}\pi$；$V_{y=1}=$

$\pi\int_0^2\left(1-2x+x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\pi$。

一元微积分学的补充应用提高题答案

1.（1）解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^{t^4}\cdot 4t^3}{\mathrm{e}^{t^4}\cdot 2t}=2t^2$；$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{4t}{\mathrm{e}^{t^4}\cdot 2t}=2\mathrm{e}^{-t^4}$。

（2）解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}}}{\cos t-\dfrac{1}{1+t^2}}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{\left(1+t^2\right)\cos t-1}$；

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(1+t^2\right)\left\{\left[\left(1+t^2\right)\cos t-1\right]\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\sqrt{1+t^2}\left[2t\cos t-\left(1+t^2\right)\sin t\right]\right\}}{\left[\left(1+t^2\right)\cos t-1\right]^3}。$$

（3）解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos t^2}{2\mathrm{e}^{-t^2}}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\cos t^2$；$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\pi}}=\left.\frac{t\mathrm{e}^{t^2}\cos t^2-t\mathrm{e}^{t^2}\sin t^2}{2\mathrm{e}^{-t^2}}\right|_{t=\sqrt{\pi}}=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{2\pi}$。

2．解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t}{2(t+1)^2}$；$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1-t}{4\left(1+t^4\right)}$。令$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$，得$t=1$。当$-1<t<1$时，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}>0$，曲线凹；当$t>1$时，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$，曲线凸。则当$-1<x<3$时，曲线凹；当$x>3$时，曲线凸。拐点为$\left(3,1-\ln 2\right)$。

3．解：（1）$S_D=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[a-a\left(1-\cos t\right)\right]a\left(1-\cos t\right)\mathrm{d}t+$
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[a\left(1-\cos t\right)-a\right]a\left(1-\cos t\right)\mathrm{d}t+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\left[a-a\left(1-\cos t\right)\right]a\left(1-\cos t\right)\mathrm{d}t=4a^2$。

（2）$V_{y=a}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\left[a-a\left(1-\cos t\right)\right]^2a\left(1-\cos t\right)\mathrm{d}t+$
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\pi\left[a\left(1-\cos t\right)-a\right]^2a\left(1-\cos t\right)\mathrm{d}t+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\pi\left[a-a\left(1-\cos t\right)\right]^2a\left(1-\cos t\right)\mathrm{d}t=$
$\int_0^{2\pi}\pi a^3\cos^2t\left(1-\cos t\right)\mathrm{d}t=\pi^2a^3$。

（3）$V_x=$
$2\left[\left(\pi a^3\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi a^3\left(1-\cos^3 t\right)\mathrm{d}t\right)+\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\pi a^3\left(1-\cos^3 t\right)\mathrm{d}t-\pi a^3\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\right)\right]=\frac{32}{3}\pi a^3$。

4．解：方程两边关于x求导，得

$$-\mathrm{e}^{-y}y'+y-x+x\left(y'-1\right)=1\quad(*)$$

当$x=0$，$y=0$时，得$y'(0)=-1$。再对$(*)$式两边关于x求导，得

$$\mathrm{e}^{-y}\left[\left(-y'\right)^2-y''\right]+2\left(y'-1\right)+xy''=0$$

则$y''(0)=-3$，曲率$k=\frac{\left|y''\right|}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$。

5．解：方程两边关于x求导，得

$$2x=\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\left(y'-1\right)\qquad(*)$$

得$y'(0)=1$。再对$(*)$式两边关于x求导，得

$$2=\mathrm{e}^{-(y-x)^2}y''+\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\left[-2\left(y-x\right)\left(y'-1\right)^2\right]$$

得 $y''(0)=2$，曲率 $k=\dfrac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，曲率半径 $R=\sqrt{2}$ 。

无穷级数提高题答案

1．B

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k}{n^2}$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 条件收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$ 条件收敛。

2．A

因为 $\left|\dfrac{\sin(na)}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(na)}{n^2}$ 绝对收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 为发散级数，所以得出 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\sin(na)}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ 发散。

3．C

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{a}{n}\right)\right|}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos\dfrac{a}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{n}\right)^2}{\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{a^2}{2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{a}{n}\right)$ 绝对收敛。

4．C

根据莱布尼茨定理，$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 为收敛的交错级数，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}=1$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 为发散级数，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^{\ 2}$ 发散。

5．D

（A）因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=2}^{\infty}a_n=a_1+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 必收敛。

（B）因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\ 2}-a_{n+1}^{\ \ 2}\right)=a_1^{\ 2}-a_2^{\ 2}+a_2^{\ 2}-a_3^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}-a_{n+1}^{\ \ 2}+\cdots=a_1^{\ 2}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\ 2}-a_{n+1}^{\ \ 2}\right)$ 必收敛。

（C）因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n}+a_{2n+1}\right)=a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{2n}+a_{2n+1}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n-a_1$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n}+a_{2n+1}\right)$必收敛。

（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n}-a_{2n+1}\right)=a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+a_{2n}-a_{2n+1}+\cdots=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n$ 未必收敛，例如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{n}$收敛，但$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散。

6．B

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(x-1\right)^n$在点$x=2$处条件收敛，故其收敛半径为$R=1$，收敛区间为$\left(0,2\right)$，故点$x=\sqrt{3}\in\left(0,2\right)$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(x-1\right)^n$的收敛点，点$x=3\notin\left(0,2\right)$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(x-1\right)^n$的发散点。

7．（1）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+2\right)!}{\left(n+1\right)^{n+2}}\cdot\dfrac{n^{n+1}}{\left(n+1\right)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+2\right)\cdot n}{\left(n+1\right)^2}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(n+1\right)!}{n^{n+1}}$收敛。

（2）解：因为$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}\left(n+1\right)!}{\left(n+1\right)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{e^n\cdot n!}=\mathrm{e}\cdot\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1\left(n=1,2,\cdots\right)$，所以$u_n>u_{n-1}>\cdots>u_1=\mathrm{e}$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n\cdot n!}{n^n}$发散。

（3）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+1\right)^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}\ln(n+1)}}{\ln n}=0$，所以级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\left(n+1\right)^{\ln n}}{\left(\ln n\right)^n}$收敛。

（$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x\cdot\ln\left(x+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}\ln\left(x+1\right)+\frac{1}{x+1}\ln x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(x+1\right)}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$。）

（4）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}}=\dfrac{1}{2}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$收敛。

（5）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{4^n}{5^n-3^n}}{\left(\dfrac{4}{5}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{5^n-3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}=1$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{5^n-3^n}$收敛。

（6）解：$\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}=\dfrac{2}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}}}{\dfrac{1}{n^2}}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^4}}}=1$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$收敛。

8．解：当$\alpha>0$时，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$$

所以，当n充分大，有

$$\frac{\ln n}{n^{\alpha}}<1$$

从而有

$$0\leqslant\frac{\ln n}{n^{1+2\alpha}}=\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{1+\alpha}}<\frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

因为$\alpha>0$，所以，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$收敛，由比较判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{1+2\alpha}}$收敛。

9．（1）解：因为

$$\left|(-1)^{n-1}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\right|=\sqrt[n]{n}-1=\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}-1$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\right|$发散。

对$\sqrt[n]{n}-1=\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}-1$，令

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

得

$$f^{'}(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

当$x\geqslant3$时，$f'(x)<0$，即$n\geqslant3$时，$\sqrt[n+1]{n+1}-1\leqslant\sqrt[n]{n}-1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=0$，根据莱布尼茨定理，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$条件收敛。

（2）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^{n^2}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=+\infty$，且$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$发散。

（3）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n+\sin n}\right|}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sin n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin n}{n}}=1$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n+\sin n}\right|$发散。又$\left\{\frac{1}{n+\sin n}\right\}$单调递减且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sin n}=0$，根据莱布尼茨定理，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+\sin n}$条件收敛。

（4）解：因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$发散。

（5） 解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}\right|}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}\right|$发散。令$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$，$f'(x)=\frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0$，从而$\left\{\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right\}$单调递减，又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0$，根据莱布尼茨定理，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$条件收敛。

10．证明：设原级数为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$，$u_n=\int_n^{n+1}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x>0$，则

$$u_{n+1}=\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x\leqslant\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{\ln(n+1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln(n+1)}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x=u_n$$

又

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}u_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

于是原级数收敛，又因

$$u_n=\int_n^{n+1}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\ln(n+1)}\geqslant\frac{1}{n+1}\ (n\geqslant 2)$$

故$\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$发散，因此原级数条件收敛。

11．（1）解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x+1)^{n+1}}{3n+2}\cdot\frac{3n-1}{(2x+1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|2x+1|\cdot\frac{3n-1}{3n+2}=|2x+1|$$

所以，当$|2x+1|<1$时，原级数收敛；当$|2x+1|>1$时，原级数发散；当$2x+1=1$时，原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$，发散；当$2x+1=-1$时，原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$，根据莱布尼茨定理，收敛。所以收敛半径$R=\frac{1}{2}$，收敛区间为$(-1,0)$，收敛域为$[-1,0)$。

（2）解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)!x^{2n+2}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)(2n+2)x^2}{(n+1)(n+1)}\right|=4x^2$$

所以当$4x^2<1$时，级数收敛；当$4x^2>1$时，级数发散；当$x=\pm\frac{1}{2}$时，原级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{4^n}$$

令

$$u_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{4^n}=\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)(2^n\cdot n!)}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(2n-1)(2n)}{(2\cdot4\cdot6\cdots2n)(2\cdot4\cdot6\cdots2n)}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$$

$$=1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}$$

得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{4^n}$发散。

所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{2}$，收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，收敛域为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

12．解：由

$$f\left(x\right)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$$

得

$$f'\left(x\right)=\frac{-2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n 4^n x^{2n}，\ \left|x\right|<\frac{1}{2}$$

$$f\left(x\right)=\int_0^x f'\left(x\right)\mathrm{d}x+f\left(0\right)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$0=\dfrac{\pi}{4}-2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n 4^n}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}}$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

13．解：由 $f\left(x\right)=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$，$f'\left(x\right)=\arctan x$，$f''\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x^2}$，展开得到

$$f''\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2n}\quad x\in\left(-1,1\right)$$

两边积分，得

$$f'\left(x\right)=f'\left(0\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad x\in\left(-1,1\right)$$

两边再次积分，得

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n+1\right)\left(2n+2\right)}x^{2n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n+1\right)\left(2n+2\right)}x^{2n+2}\quad x\in\left(-1,1\right)$$

右边级数在 $x=\pm1$ 处收敛，左边函数在 $x=\pm1$ 处连续，所以成立范围可扩大到 $\left[-1,1\right]$。

14． 解：因为

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2n}，\ x\in\left(-1,1\right)$$

故

$$\arctan x=\int_0^x\left(\arctan x\right)'\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}x^{2n+1}，\ x\in\left[-1,1\right]$$

于是有

$$f\left(x\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}x^{2n+2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=1+$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{1-4n^2}x^{2n}，\ x\in\left[-1,1\right]$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}\left[f(1)-1\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$。

15． 解：设

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n},\quad s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n},\quad s_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$$

则

$$s(x)=s_1(x)-s_2(x),\quad x\in(-1,1)$$

由于

$$s_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},\quad \left(xs_1(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},\quad x\in(-1,1)$$

因此

$$xs_1(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

又由于

$$s_1(0)=0$$

故

$$s_1(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & |x|\in(0,1)\\ 0, & x=0\end{cases}$$

所以

$$s(x)=s_1(x)-s_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}, & |x|\in(0,1)\\ 0, & x=0\end{cases}$$

16． 解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\dfrac{1}{n\cdot 2^n}}\right|=\dfrac{1}{2}$，所以收敛半径$R=2$，收敛区间为$(-2,2)$，易见在$x=-2$处收敛，在$x=2$处发散，故收敛域为$[-2,2)$。

设

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$$

$$xs(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$$

$$\left(xs(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2-x},\quad -2<x<2$$

因此

$$xs\left(x\right)=\int_0^x\frac{1}{2-x}\mathrm{d}x=\ln2-\ln\left(2-x\right)，\quad s\left(x\right)=\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)}{x}，\quad -2<x<2，\quad x\neq0$$

此外，当 $x=0$ 时，由 $s\left(x\right)$ 的表达式

$$s\left(x\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x+\cdots$$

知

$$s\left(0\right)=\frac{1}{2}$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot2^n}x^{n-1}$ 在 $x=-2$ 处收敛，所以 $s\left(x\right)$ 在 $x=-2$ 处连续，因此得

$$s\left(x\right)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & -2\leqslant x<2, x\neq0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

17． 解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n}{\left(n-1\right)!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2}=0$，所以收敛半径 $R=+\infty$，收敛域为 $\left(-\infty,+\infty\right)$。

设

$$s\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{\left(n-1\right)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(n+1\right)x^n}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)'=\left(xe^x\right)'=\left(x+1\right)e^x$$

于是

$$s\left(x\right)=\left(x+1\right)e^x，\quad x\in\left(-\infty,+\infty\right)$$

18． 解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\left(2n+3\right)}x^{2n+4}}{\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n+1\right)}x^{2n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\left(2n+1\right)}{\left(2n+3\right)}=x^2$$

当 $x^2<1$ 时收敛，当 $x^2>1$ 时发散，当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}$ 收敛，所以收敛域为 $\left[-1,1\right]$。

设

$$s\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}x^{2n+2}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

设

$$g\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$g'\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}x^{2n}=\frac{1}{1+x^{2}}，\ -1<x<1$$

因此

$$g\left(x\right)-g\left(0\right)=\int_{0}^{x}\frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\arctan x$$

又

$$g\left(0\right)=0，\ g\left(x\right)=\arctan x，\ s\left(x\right)=x\arctan x，\ -1<x<1$$

又$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{2n+1}x^{2n+2}$在$x=\pm1$处收敛，所以$s\left(x\right)$在$x=\pm1$处连续，于是

$$s\left(x\right)=x\arctan x，\ -1\le x\le1$$

$$s\left(1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{2n+1}=\arctan1=\frac{\pi}{4}$$

即级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$。

19．证明:（1）由拉格朗日中值定理，得

$$\left|f\left(\frac{1}{2^{n}}\right)-f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right|=f'(\xi)\left(\frac{1}{2^{n}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=f'(\xi)\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant M\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f\left(\frac{1}{2^{n}}\right)-f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$绝对收敛。

（2）设$s_n=f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$存在，所以$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2^{n}}\right)$存在。

附录 C.3 考试样卷答案

《微积分 I》期中考试样卷（一）答案

一、计算题

1．1。

2．$-\dfrac{1}{2}$。

3．1。

4．$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$。

5．$\dfrac{1}{2}$。

6．$y'=\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1}+\mathrm{e}^x+x^x(\ln x+1)$。

7．$\mathrm{d}y=\left[2\mathrm{e}^{\pi}\sec^2 2x+\dfrac{6(\arcsin 2x)^2}{\sqrt{1-4x^2}}\right]\mathrm{d}x$。

8．$y'=f'(\ln x)\dfrac{1}{x}+\dfrac{f'(x)}{f(x)}$；$y''=\dfrac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}-\dfrac{[f'(x)]^2}{f^2(x)}+\dfrac{f''(x)}{f(x)}$。

9．$(-\infty,-1]$单调递增，$[-1,3]$单调递减，$[3,+\infty)$单调递增。

二、综合题

1．切线方程：$y=-3x+4$，

法线方程：$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$。

2．$-f'(0)$。

3．$\mathrm{d}y=\left[\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{2(\mathrm{e}^x+1)}\right]\mathrm{d}x$。

4. $a=2$，$b=1$。

三、证明题

略。

四、填空与选择填空题

1．$2^{\frac{3}{7}}$。

2．$\mathrm{e}^{-3}-2$。

3．4，2。

4．可去间断点。

5．$2^{2015}\sin\left(2x+1+\dfrac{2015}{2}\pi\right)$。

6．$2\sqrt{x}$，$-\cos x$，$\sec x$，$\dfrac{1}{4}x^4$。

《微积分 I》期中考试样卷（二）答案

一、计算题

1．$e^{\frac{1}{2}}$。

2．$-\dfrac{1}{2}$。

3．$-\dfrac{1}{2}$。

4．$-\dfrac{1}{3}$。

5．e。

6．$y' = ex^{e-1} + (3e)^x \ln(3e) + 3e^{3x}$，$y'' = e(e-1)x^{e-2} + (3e)^x \left[\ln(3e)\right]^2 + 9e^{3x}$。

7．$dy = \left[(\sin x)^x (\ln\sin x + x\cot x) + \dfrac{6(\arcsin 2x)^2}{\sqrt{1-4x^2}}\right]dx$。

8．$\dfrac{dy}{dx} = f'(\tan x)\sec^2 x + \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$。

9．$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+y}{x+3y^2}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\dfrac{1}{3}$。

10．$dy = \left[e^x \sec(e^x)\tan(e^x) - \dfrac{1}{2(e^x+1)}\right]dx$。

二、综合题

1．切线方程：$y = (e-1)x + e$，法线方程：$y = \dfrac{x}{1-e} + e$。

2．$e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$。

3．$y^{(2016)}(x) = x \cdot 2^{2016}\dfrac{(-1)^{2015}(2015)!}{(2x+3)^{2016}} + 2016 \cdot 2^{2015}\dfrac{(-1)^{2014}(2014)!}{(2x+3)^{2015}}$。

4．$a = 2$，$b = 1$。

三、证明题

提示：令$G(x) = xf(x)$。

四、填空和选择填空题

1．2，100。

2．$e^{-3} - 2$。

3．$\dfrac{1}{3}$，3。

4．$-\dfrac{1}{30}$。

5．$e^{f(x)}$。

6．C。

7．C。

8．A。

《微积分 I》期末考试样卷（一）答案

一、极限题

1．$\frac{1}{2}$。

2．$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$。

3．$\frac{1}{2}$。

4．-2。

二、导数题

1． $y'=2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+x^{\arctan x}\left(\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{\arctan x}{x}\right)$。

2．$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x-y}{x-3y^2}$， $\mathrm{d}y=\frac{2x-y}{x-3y^2}\mathrm{d}x$。

3．$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$。

三、积分题

1．$-2\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\arcsin\frac{x}{2}+C$。

2．$-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$。

3．$\frac{\pi}{4}+\ln\frac{3}{2}$。

4．1。

四、导数与积分应用题

1．（1） $y_{\max}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$，无最小值。

（2）凸区间：$(-\infty,1]$，凹区间：$[1,+\infty)$，拐点：$\left(1,\mathrm{e}^{-2}\right)$。

2．（1）$\frac{4}{3}$。（2）$V_x=\frac{3}{2}\pi$。

五、级数题

1． 发散。

2． $R=1$，收敛区间$(-1,1)$， $s(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$， $|x|<1$， $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}=\frac{9}{4}$。

六、证明题

1．略。

2．提示：令$x=\frac{\pi}{2}-t$，积分值为$\frac{\pi}{4}$。

《微积分Ⅰ》期末考试样卷（二）答案

1．$\dfrac{3}{2}$。

2．e^{-3}。

3．$\dfrac{1}{2}$。

4．$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}+\cos x\cdot\sqrt{1+\sin^4 x}$，$\mathrm{d}y=\left[\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}+\cos x\cdot\sqrt{1+\sin^4 x}\right]\mathrm{d}x$。

5．$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2-2\mathrm{e}^{2x+y}}{\mathrm{e}^{2x+y}-2xy}$，切线方程：$y=-2x$。

6．$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\left(1+t^2\right)$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{6\left(1+t^2\right)}{t}$。

7．$\dfrac{3^{x-2}}{\ln 3}+\dfrac{1}{3}\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{\sin x}+C$。

8．$-\dfrac{3}{2}\ln|x-1|+\dfrac{5}{2}\ln|x-3|+C$。

9．$-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}\cos 4\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{4}\sin 4\sqrt{x+1}\right)+C$。

10．（1）最大值：$\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$，最小值 e^{-2}；（2）$2\mathrm{e}^{-2}\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$。

11．略。

12．凹区间为：$(-\infty,0)$，$[1,+\infty)$；凸区间为：$(0,1]$；拐点 $(1,0)$。

13．（1）$A=2(\pi-1)$；（2）$V=\dfrac{29}{6}\pi^2$。

14．（1）收敛；（2）收敛。

15．$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{5}\left[-1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}\right](x-1)^n$，$0<x<2$。

16．提示：$\left|f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)-f\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right|=\left|f'(\xi)\left(\dfrac{n-1}{n}-\dfrac{n}{n+1}\right)\right|\leqslant\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n^2}$。

《微积分Ⅰ》期末考试样卷（三）答案

1．解：对方程 $x^2+y=\tan(x-y)$ 两边关于 x 求导数，有

$$2x+y'=\sec^2(x-y)(1-y')$$

以 $x=0$，$y=0$ 代入，有

$$y'(0)=1-y'(0)$$

所以有

$$y'(0)=\frac{1}{2}$$

对方程 $2x+y'=\sec^2(x-y)(1-y')$ 的两边关于 x 求导数，有

$$2+y''=2\sec^2(x-y)\tan(x-y)(1-y')+\sec^2(x-y)(-y'')$$

以 $x=0$， $y(0)=0$， $y'(0)=\dfrac{1}{2}$ 代入，有

$$2+y''(0)=-y''(0)$$

所以有

$$y''(0)=-1$$

2．解： $\dfrac{dx}{dt}=2e^{-t^2}$， $\dfrac{dy}{dt}=\cos t^2$， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t^2}{2e^{-t^2}}=\dfrac{1}{2}e^{t^2}\cos t^2$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=$ $\dfrac{te^{t^2}\cos t^2-te^{t^2}\sin t^2}{2e^{-t^2}}=\dfrac{1}{2}te^{2t^2}\left(\cos t^2-\sin t^2\right)$， $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\pi}}=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{2\pi}$。

3．解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-\cos 2x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\cos 2x\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\cos 2x\right)}=$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-\cos^2 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\cos 2x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin^2 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\cos 2x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}\right)\cdot$ $\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}+\cos 2x\right)}=(1+4)\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$。（注：本题也可用洛必达法则求解。）

4．解： $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(1+\frac{e^x-1-x}{x}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{e^x-1-x}{x}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}}=$ $e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}$。（注：分子 $\ln\left(1+\dfrac{e^x-1-x}{x}\right)\sim\dfrac{e^x-1-x}{x}$， $x\to 0$。）

5．解： $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$ （分子利用 $\sin^2 x\sim x^2$， $x\to 0$）$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}$ （用洛必达法则）$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos^2 x+2\sin^2 x}{12x^2}$ （用洛必达法则）$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin^2 x}{12x^2}=\dfrac{1}{3}$。

6．解： $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln(1+x)d\frac{1}{x}$ （分部积分法）$=-\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]\Bigg|_1^{+\infty}+$ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=-\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-\ln x+\ln(1+x)\right]\Bigg|_1^{+\infty}=-\left[\frac{\ln(1+x)}{x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\Bigg|_1^{+\infty}=$

$-(0+0-\ln 2-\ln 2)=2\ln 2$。

7．解：$\int_{-1}^{1}(2+x)^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$ （令 $x=\sin t$， $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$ ）$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin t)^2\cdot$ $\cos^3 t\cos t\mathrm{d}t$ $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^4 t+4\sin t\cos^4 t+\sin^2 t\cos^4 t\right)\mathrm{d}t$（其中 $4\cos^4 t$， $\sin^2 t\cos^4 t$ 为偶函数，$4\sin t\cos^4 t$ 为奇函数）$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4+\sin^2 t\right)\cos^4 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(5-\cos^2 t\right)\cos^4 t\mathrm{d}t=$ $10\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\mathrm{d}t$ $=10\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{25}{16}\pi$。

8．解：令

$$f(x)=\arctan 3x-\ln(1+4x)$$

可得

$$f'(x)=\frac{3}{1+9x^2}-\frac{4}{1+4x}=\frac{-36x^2+12x-1}{(1+9x^2)(1+4x)}=-\frac{(6x-1)^2}{(1+9x^2)(1+4x)}\leqslant 0$$

其中，仅当 $x=\frac{1}{6}$ 时有

$$f'(x)=0$$

所以，当 $0\leqslant x<+\infty$ 时， $f(x)$ 严格单调减，且 $f(0)=0$，则有 $f(x)\leqslant 0$，即 $\arctan 3x\leqslant\ln(1+4x)$，仅当 $x=0$ 时成立等号，证毕。

9．解：当 $\alpha>0$ 时，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$$

所以，当 n 充分大时，有

$$\frac{\ln n}{n^\alpha}<1$$

从而有

$$0<\frac{\ln n}{n^{1+2\alpha}}=\frac{\ln n}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n^{1+\alpha}}<\frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

因为 $\alpha>0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛，由比较判别法，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1+2\alpha}}$ 收敛。

10．解：当 $x=0$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$ 收敛；当 $x\neq 0$ 时，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}}{(2n+3)(2n+4)}x^{2n+4}}{\frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}}\right|=4|x|^2$，所以，当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，级数绝对收敛，当 $|x|>\frac{1}{2}$

时，级数发散。得收敛半径 $R=\frac{1}{2}$，收敛区间为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。当 $|x|=\pm\frac{1}{2}$ 时，级数绝对收敛，收敛域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$。

设

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$s''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-4x^2\right)^n=\frac{1}{1+4x^2}\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

则

$$s'(x)=s'(0)+\int_0^x\frac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arctan 2x$$

其中

$$s'(0)=0$$

有

$$s(x)=s(0)+\frac{1}{2}\int_0^x\arctan 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x\arctan 2x-\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)\right]$$

其中

$$s(0)=0，\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

11．解：$f'(x)=ax^2-1$，$f''(x)=2ax$，令

$$f'(x)=0$$

得

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{a}}$$

因此，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f''(x)>0$，曲线向上凹。当 $0<a<1$ 时，$x_0=\sqrt{\frac{1}{a}}\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$f(x_0)=-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{2}}$，为最小值；为求最大值，作如下讨论：

由

$$f(0)=0，\ f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1-3a}{3a^2}$$

若 $0<a<\frac{1}{3}$，则 $f\left(\frac{1}{a}\right)>0=f(0)$，所以 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1-3a}{3a^2}$ 为最大值；若 $\frac{1}{3}\leqslant a<1$，则

$f\left(\dfrac{1}{a}\right)\leqslant 0=f\left(0\right)$，所以 $f\left(0\right)=0$ 为最大值；若 $a\geqslant 1$，则 $x_0=\sqrt{\dfrac{1}{a}}\geqslant\dfrac{1}{a}$， $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$ 内单调减，所以 $f\left(0\right)=0$ 为最大值， $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1-3a}{3a^2}$ 为最小值。

12．解： $V=\pi\int_0^2\left[\left(2-\dfrac{y^2}{2}\right)^2-\left(2-y\right)^2\right]\mathrm{d}y=\pi\int_0^2\left(4y-3y^2+\dfrac{y^4}{4}\right)\mathrm{d}y=\dfrac{8}{5}\pi$ 。

13．证明： 构造函数 $F\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x\right), & x\neq x_0\\ 0, & x=x_0\end{cases}$ ， $G\left(x\right)=\begin{cases}g\left(x\right), & x\neq x_0\\ 0, & x=x_0\end{cases}$ ，设 $x\in\overset{0}{\bigcup}\left(x_0\right)$，由于 $F\left(x\right)$， $G\left(x\right)$ 在区间 $\left[x_0,x\right]$ 或 $\left[x,x_0\right]$ 上满足柯西定理的条件，故有

$$\frac{F\left(x\right)-F\left(x_0\right)}{G\left(x\right)-G\left(x_0\right)}=\frac{F'\left(\xi\right)}{G'\left(\xi\right)}$$

即 $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{f'\left(\xi\right)}{g'\left(\xi\right)}$，其中 ξ 介于 x_0 和 x 之间，且当 $x\to x_0$ 时，有 $\xi\to x_0$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'\left(\xi\right)}{g'\left(\xi\right)}=\lim\limits_{\xi\to x_0}\dfrac{f'\left(\xi\right)}{g'\left(\xi\right)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=A$（或 ∞ ）。

反例，如 $f\left(x\right)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$， $g\left(x\right)=x$，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}$ 该极限不存在。

14．证明： $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-\infty,+\infty\right)$，因为 $f\left(1\right)=0$， $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{4}>0$， $f\left(\dfrac{7}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}\approx-0.707+0.25+0.375=-0.707+0.625<0$， $f\left(2\right)=1>0$，所以，方程 $f\left(x\right)=0$ 分别在区间 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right)$， $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{4}\right)$， $\left(\dfrac{7}{4},2\right)$ 内至少有一个实根，即方程 $f\left(x\right)=0$ 在区间 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内至少有三个不同的实根。

又因为 $f'\left(x\right)=\pi\sin\pi x+6\left(2x-3\right)^2+\dfrac{1}{2}$， $f''\left(x\right)=\pi^2\cos\pi x+24\left(2x-3\right)$， $f'''\left(x\right)=-\pi^3\sin\pi x+48>0$，即 $f'''\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内严格单调增，且 $f''\left(x\right)$ 只有一个零点 $x=\dfrac{3}{2}$，也即曲线 $f\left(x\right)$ 最多只有一个拐点。所以，方程 $f\left(x\right)=0$ 至多有三个不同的实根，所以有结论：方程 $f\left(x\right)=0$ 在区间 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 正好有三个不同的实根。

《微积分Ⅰ》期末考试样卷（四）答案

1．解法一：按定义求。

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)}{x-1}=$$
$$\lim_{x\to1}(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)=(-1)(-2)\cdots(-99)=-(99!)$$

解法二：用公式求。

$$f'(x)=(x-1)'(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)+(x-1)\left[(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^{100}-100)\right]'$$

将 $x=1$ 代入，得

$$f^{'}(1)=(1-2)(1-3)\cdots(1-100)=(-1)(-2)\cdots(-99)=-(-99!)$$

2．解：$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3t^2+3$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3t^2-3$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=$ $\frac{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}{t^2+1}=\frac{4t}{(t^2+1)^3}$，令 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0\Leftrightarrow t=0$，当 $t<0$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$，曲线向上凸（下凹），当 $t>0$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}>0$，曲线向上凹。因为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3t^2+3>0$，$\forall t\in(-\infty,+\infty)$，所以 x 是 t 的严格单调增函数，当 $t=0$ 时，$x=1$；当 $t<0$ 时，$x<1$；当 $t>0$ 时，$x>1$。所以，当 $-\infty<x<1$ 时，曲线向上凸（下凹），当 $1<x<+\infty$ 时，曲线向上凹，点 $(1,1)$ 是拐点。

3．解：（1）对方程 $x^2=\int_0^{y-x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 两边关于 x 求导数，得

$$2x=\mathrm{e}^{-(y-x)^2}(y'-1)$$

因为当 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $y'(0)=1$。

（2）对方程 $2x=\mathrm{e}^{-(y-x)^2}(y'-1)$ 两边关于 x 求导数，得

$$2=\mathrm{e}^{-(y-x)^2}y''+\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\left[-2(y-x)(y'-1)^2\right]$$

以 $x=0$，$y=0$，$y'(0)=1$ 代入，得

$$y''(0)=2$$

所以，曲率 $k=\frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{2\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}$，曲率半径 $R=\sqrt2$。

4．解法一：$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^4}\right)$（分子利用 $\sin^2x\sim x^2,x\to0$）$=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x-2x\cos^2x+x^2\sin2x}{4x^3}$（一次洛必达法则）$=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x-2\cos^2 x+2x\sin 2x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}{12x^2}$ （二次洛必达法则）$=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4\sin 2x+4\sin 2x+8x\cos 2x+2\sin 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x}{24x}$ （三次洛必达法则）

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\sin 2x}{12x}-\dfrac{4x\sin 2x}{6}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$。

解法二：利用带佩亚诺余项的泰勒公式：有

$$\sin^2 x=\left[x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right]^2=x^2-\frac{1}{3}x^4+o_1\left(x^4\right)$$

$$x^2\cos^2 x=x^2\left[1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right]^2=x^2-x^4+o_2\left(x^4\right)$$

则

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^4}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{3}x^4+o_1\left(x^4\right)-x^2+x^4-o_2\left(x^4\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)}{x^4}=\frac{2}{3}$$

5．解：$f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+\left(a-1\right)x^n+1}{x^{2n}-ax^n+1}=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ \dfrac{a+1}{2-a}, & \left(a\neq 2\right), x=1\\ x, & x>1\end{cases}$，由 $f\left(x\right)$ 表达式知，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,1\right)$，$\left(1,+\infty\right)$ 上连续，$f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 连续的充要条件是 $f\left(1^-\right)=f\left(1^+\right)$，即 $1=\dfrac{a+1}{2-a}$，得 $a=\dfrac{1}{2}$。

所以，仅当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上连续。

6．解：（1）因为 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^x}\right)=\infty$，所以 $x=0$ 是一条垂直渐近线；

（2）因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^x}\right)=0$，所以 $y=0$ 是一条沿 $x\to+\infty$ 方向的水平渐近线；

（3）因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x}\right)=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(y-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^x}-x\right)=$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\right)=0$，所以 $y=x$ 是一条沿 $x\to-\infty$ 方向的斜渐近线；

总之，共有三条渐近线，分别是 $x=0$，$y=0$，$y=x$。

7．$\int_{-2}^{2}\left(x-1\right)^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\left(x^2-2x+1\right)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$（其中，因为 $2x\sqrt{4-x^2}$ 是奇函数，

所以 $-\int_{-2}^{2}2x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=0$ ） $=2\int_0^2\left(x^2+1\right)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ （令 $x=2\sin t$， $\mathrm{d}x=2\cos t$ ） $=$ $32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t+8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t$ $=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t-32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t=$ $40\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-32\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=$ $10\pi-6\pi=4\pi$。

8．解：用分部积分法。

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\arctan x}{x^2}\right|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x\right]=$$

$$-\frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{4}-\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{8}-\left.\frac{1}{2x}\right|_1^{+\infty}-\frac{1}{2}\arctan x\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}。$$

9．解：因为 $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\mathrm{d}x$，所以有 $a_n>a_{n+1}\left(n=1,2,\cdots\right)$，即 $\left\{a_n\right\}$ 单调减。又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\mathrm{d}x=0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n$ 收敛（莱布尼茨定理）；因为 $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+x^n}\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{a}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{a}}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a}}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\left(-1\right)^n a_n\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n$ 条件收敛。

10．解： $f\left(0\right)=\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}}=\mathrm{e}^2$，则

$$f'\left(0\right)=\lim_{x\to0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to0}f'\left(x\right)=$$

$$\lim_{x\to0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{2\cos 2x}{x\left(1+\sin 2x\right)}-\frac{\ln\left(1+\sin 2x\right)}{x^2}\right]=$$

$$\lim_{x\to0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{x}}\lim_{x\to0}\left[\frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}-\ln\left(1+\sin 2x\right)}{x^2}\right]=$$

$$\mathrm{e}^2\lim_{x\to0}\frac{2x\cos 2x-\left(1+\sin 2x\right)\ln\left(1+\sin 2x\right)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sin 2x}=$$

$$\mathrm{e}^2\lim_{x\to0}\frac{2x\cos 2x-4x\sin 2x-2\cos 2x\ln\left(1+\sin 2x\right)-2\cos 2x}{2x}=$$

$$\mathrm{e}^2\lim_{x\to0}\frac{-4x\sin 2x-2\cos 2x\ln\left(1+\sin 2x\right)}{2x}=$$

$$\mathrm{e}^2\lim_{x\to0}\left(-2\sin 2x-2\cos 2x\ln\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{2x}}\right)=-2\mathrm{e}^2$$

所以，切线方程： $y-\mathrm{e}^2=-2\mathrm{e}^2x$。

11．体积 $V=V_0-V_1$，其中

$$V_0=\pi(2a)^2\cdot 2\pi a=8\pi^2a^3$$

$$V_1=\pi\int_0^{2\pi a}(2a-y)^2\,\mathrm{d}x=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^2(1-\cos t)\,\mathrm{d}t=$$

$$\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1+\cos t-\cos^2 t+\cos^3 t\right)\mathrm{d}t=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2 t\right)\mathrm{d}t=\pi a^3\left(2\pi-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right)=$$

$$\pi a^3\left(2\pi-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\pi^2a^3$$

12．因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\dfrac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}x^{2n+2}}{\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}}\right|=|x|^2$，当 $|x|<1$ 时，即当 $-1<x<1$ 时，级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，通项不趋于零，级数发散；当 $x=\pm1$ 时，原级数通项的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}=\infty$，级数发散；所以，收敛半径 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$，收敛域为 $(-1,1)$。

设

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=s_1(x)+s_2(x)\quad x\in(-1,1)$$

其中

$$s_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(2n+1)x^{2n}dx\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$x\in(-1,1)$$

（利用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{1}{1-x^2}$， $x\in(-1,1)$）

$$xs_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}=2\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}\right)'\mathrm{d}x=2\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\mathrm{d}x=2\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}\quad x\in(-1,1)$$

则

$$s_2(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad x\in(-1,1),\quad x\neq 0$$

且

$$s(0)=3$$

综合有

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,1),x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$$

13．证明：（1）设 $f(x)=\sqrt{x}$，由拉格朗日中值定理，有

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}},x<\xi<x+1,x\geqslant 0$$

令 $\eta=\xi-x$，得 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\eta}}$，$0<\eta<1$。

（2）由（1）有 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=2\sqrt{x+\eta}$，从而解得

$$\eta=\eta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x(x+1)}-x\right)$$

又

$$\lim_{x\to+\infty}\eta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+1)}-x\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\eta(x)=\frac{1}{4}$$

又因为

$$\eta'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}-1\right]=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{4x^2+4x}}-1\right)>0$$

得 $\eta(x)$ 严格单调递增，故 $\eta(x)$ 的值为 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$。

14．证明：（1）$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi}\mathrm{d}t=$ $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\pi}\right)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{x(x+\pi)}\mathrm{d}x>0$，证毕。

（2）由（1），$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{x(x+\pi)}\mathrm{d}x>\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\pi\sin x}{x(x+\pi)}\mathrm{d}x>\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\pi\sin\alpha}{x(x+\pi)}\mathrm{d}x$，证毕。